
*Espacio de palabras cíclicas y
estructura de biálgebra de Lie*

Ana González de los Santos

Orientador: *Miguel Paternain*

abril de 2006

Tesis de maestría
Maestría en Matemática
Universidad de la República
Montevideo - Uruguay.



Espacio de palabras cíclicas y estructura de biálgebra de Lie

Ana González de los Santos

Centro de Matemática, Facultad de Ciencias.

ana@cmat.edu.uy

Orientador: *Miguel Paternain*

Centro de Matemática, Facultad de Ciencias.

miguel@cmat.edu.uy

3 de mayo de 2006

Tesis de maestría
Maestría en Matemática
Universidad de la República
Montevideo - Uruguay.

Resumen-Abstract

Resumen

Este trabajo trata de estudiar la estructura algebraica del *espacio de clases libres de homotopía de curvas sobre una superficie* y del *espacio de las palabras cíclicas*.

En el primer capítulo se da la definición de biálgebras de Lie y se presentan algunos ejemplos de ellas. El segundo capítulo se define el espacio de curvas sobre una superficie y se demuestra que dicho espacio tiene estructura de biálgebra de Lie involutiva. El tercer capítulo está dedicado a definir el espacio de las palabras cíclicas \mathbb{V} , los mapas corchete de Lie $[\] : \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ y cocorchete de Lie $\delta : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$. En el capítulo cuarto se establece una correspondencia entre los dos espacios anteriormente mencionados. Finalmente en el último capítulo se demuestra de forma combinatoria que el espacio de las palabras cíclicas tiene estructura de álgebra de Lie y coálgebra de Lie y se muestra que existe una biyección entre el espacio de las palabras cíclicas y el espacio de curvas sobre una superficie que respeta las estructuras algebraicas mencionadas.

La principal referencia bibliográfica es el artículo “ Combinatorial Lie bialgebras of curves on surfaces ” escrito por Moira Chas. [1]

Abstract

The purpose of this work is to study the algebraic structure of the *vector space of cyclic words* and the *space of free homotopy classes of curves on surfaces*.

In the first chapter we give some basic notions concerning Lie bialgebras and present some examples. In the second chapter following Goldman and Turaev we define the space of free homotopy classes of curves on surfaces. We prove that this space has the structure of an involutive Lie bialgebra. The third chapter is dedicated following M. Chas to define the vector space of cyclic words \mathbb{V} , the Lie bracket $[\] : \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ and the Lie cobracket $\delta : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$. In the next chapter we present a one-to-one correspondence between the spaces already mentioned. Finally, in the last chapter, we give a direct proof of the fact that the vector space of cyclic words has Lie algebra and Lie coalgebra structure. Following M. Chas, we show that there exists a one-to-one map between the spaces already mentioned. This correspondence preserves the spaces' algebraic structures.

The main bibliographic reference for this work is the article “ Combinatorial Lie bialgebras of curves on surfaces ” written by Moira Chas. [1]

Palabras clave:

Palabras cíclicas, pares ligados, curvas en superficies, biálgebras de Lie.

Índice general

	0
Resumen-Abstract	1
Introducción	5
Capítulo 1. Biálgebras de Lie	7
1. Biálgebras de Lie	7
2. Ejemplos de biálgebras de Lie	8
Capítulo 2. Biálgebra de Lie de curvas sobre una superficie	13
1. Espacio de curvas sobre una superficie, estructura de álgebra de Lie	13
2. Espacio de curvas sobre una superficie, estructura de biálgebra de Lie	18
Capítulo 3. Espacio de las palabras cíclicas	27
1. Palabras cíclicas y pares ligados	27
2. Cocorchete de Lie	28
3. Corchete de Lie	31
Capítulo 4. Correspondencia entre puntos de intersección y pares ligados	37
1. Arcos representativos	37
2. Autointersección de curvas y pares ligados	43
3. Puntos de intersección y pares de segmentos representativos	47
Capítulo 5. Estudio combinatorio del espacio de las palabras cíclicas	49
1. Estructura de coálgebra de Lie	49
2. Estructura de álgebra de Lie	54
3. Isomorfismo	74
Apéndice A.	77
1. Grupos libres	77
2. Grupo fundamental y topología diferencial	79
3. Métrica hiperbólica	82
Apéndice. Bibliografía	85

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es estudiar la estructura algebraica del *espacio de las palabras cíclicas* y del *espacio de clases de homotopía libre de curvas sobre una superficie*, utilizando para ello diferentes herramientas. Por un lado se demuestra que el espacio de curvas sobre una superficie tiene estructura de biálgebra de Lie, utilizando para ello herramientas topológicas y de geometría, siguiendo las presentaciones de Goldman y Turaev. Por otro lado M. Chas [1] definió el espacio de las palabras cíclicas y probó que hay un isomorfismo entre ambas estructuras. En este trabajo además de exponer las ideas de M. Chas incluimos un abordaje combinatorio directo para el estudio del espacio de las palabras cíclicas.

William Goldman en el trabajo “Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representation” demostró que el espacio de curvas sobre una superficie tiene estructura de álgebra de Lie (ver [3]). Posteriormente Vladimir G. Turaev en el trabajo “Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces” probó que el mismo espacio de Goldman tiene estructura de biálgebra de Lie (ver [10]). Finalmente Moira Chas en el trabajo anteriormente mencionado definió un espacio, el cual llamó *espacio de palabras cíclicas* \mathbb{V} y dos funciones, corchete $[\cdot, \cdot] : \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ y cocorchete $\delta : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$, demostrando que dada una superficie compacta orientable con borde y con característica de Euler $1 - n$ existe una biyección entre el espacio de las curvas sobre esta superficie y un espacio de palabras cíclicas \mathbb{V} generado por n elementos y que esta biyección hace corresponder los mapas corchete y cocorchete de \mathbb{V} con los mapas corchete de Lie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y cocorchete de Lie Δ del espacio de curvas sobre la superficie. De donde deduce que el espacio de las palabras cíclicas \mathbb{V} tiene estructura de biálgebra de Lie.

Para finalizar con esta introducción, veamos el contenido de este trabajo. En el primer capítulo daremos las definiciones de álgebra, coálgebra y biálgebra de Lie y presentaremos algunos ejemplos de biálgebras de Lie.

En el siguiente capítulo definiremos el espacio de curvas sobre una superficie y probaremos que dicho espacio tiene estructura de biálgebra de Lie involutiva.

En el capítulo tres definiremos el espacio de las palabras cíclicas \mathbb{V} , los mapas corchete de Lie $[\cdot, \cdot] : \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ y cocorchete de Lie $\delta : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$.

En el capítulo cuatro veremos que a una superficie le podemos asociar un alfabeto y luego probaremos que existe una correspondencia uno a uno entre los puntos de autointersección de curvas en la superficie y los pares ligados de la palabra correspondiente (definidos en la sección uno del capítulo tres) y entre los puntos de corte de dos curvas

sobre la superficie y los pares de pares ligados correspondientes a las palabras asociadas. Demostraremos que el espacio de las palabras cíclicas junto con los mapas corchete y cocorchete tiene estructura de álgebra de Lie y de coálgebra de Lie.

En el último capítulo, utilizando un abordaje combinatorio directo, probaremos que el espacio de las palabras cíclicas tiene estructura de álgebra de Lie y de coálgebra de Lie. Además veremos existe un mapa biyectivo entre el espacio de las curvas sobre una superficie compacta orientable con borde y un espacio de palabras cíclicas y probaremos que dicha biyección respeta las estructuras algebraicas existentes en cada espacio. Concluyendo, finalmente que estos espacios de palabras cíclicas tienen estructura de biálgebra de Lie involutiva.

CAPÍTULO 1

Biálgebras de Lie

Este capítulo se divide en dos secciones. En la primera sección se introducen los conceptos de *álgebra de Lie*, *coálgebra de Lie* y *biálgebra de Lie*, también se da la noción de *biálgebra de Lie involutiva* y en la segunda sección se dan ejemplos de biálgebras de Lie. Una presentación más detallada de estos temas se puede encontrar en [8].

En todo el capítulo \mathbb{k} es un anillo conmutativo.

1. Biálgebras de Lie

Sea A un \mathbb{k} -módulo, consideremos los mapas

$$s : A \otimes A \rightarrow A \otimes A \quad \text{y} \quad \varepsilon : A \otimes A \otimes A \rightarrow A \otimes A \otimes A$$

por

$$s(x \otimes y) = y \otimes x \quad \text{y} \quad \varepsilon(x \otimes y \otimes z) = z \otimes x \otimes y.$$

DEFINICIÓN 1.1. Un *álgebra de Lie* sobre \mathbb{k} es un \mathbb{k} -módulo A provisto de un morfismo lineal $[\ , \] : A \otimes A \rightarrow A$ llamado *corchete de Lie* que verifica:

- 1) *Antisimetría*: $[\ , \] \circ s = -[\ , \]$.
- 2) *Condición de Jacobi*: $[\ , \] \circ (id \otimes [\ , \]) \circ (id + \varepsilon + \varepsilon^2) = 0$.

DEFINICIÓN 1.2. Un *morfismo de álgebras de Lie* es un mapa lineal $\vartheta : A \rightarrow B$ que verifica

$$\vartheta([u, v]) = [\vartheta(u), \vartheta(v)] \quad \text{para todo } u, v \in A.$$

OBSERVACIÓN 1.1. Si A es un álgebra asociativa, podemos darle estructura de álgebra de Lie definiendo el corchete de Lie como:

$$[u, v] = uv - vu \quad \text{para todos } u, v \in A.$$

A este corchete se lo llama *conmutador de A*.

NOTACIÓN : $A_{Lie} = (A, [\ , \])$, donde $[\ , \]$ es el conmutador de A .

Dualizando esta construcción tenemos el concepto de coálgebra de Lie.

DEFINICIÓN 1.3. Una *coálgebra de Lie* sobre \mathbb{k} es un \mathbb{k} -módulo C provisto de un morfismo lineal $\delta : C \rightarrow C \otimes C$ llamado *cocorchete de Lie* que verifica:

- 1) *Coantisimetría*: $s \circ \delta = -\delta$.
- 2) *Condición de co-Jacobi*: $(id + \varepsilon + \varepsilon^2) \circ (id \otimes \delta) \circ \delta = 0$.

DEFINICIÓN 1.4. Una *biálgebra de Lie* es una terna $(B, [,], \delta)$ donde $(B, [,])$ es un álgebra de Lie, (B, δ) es una coálgebra de Lie y δ es un 1-ciclo respecto a la acción diagonal de B en $B \otimes B$, es decir que δ verifica:

$$\delta([u, v]) = u \cdot \delta(v) - v \cdot \delta(u) \quad \forall u, v \in B$$

en que $u \cdot (v \otimes w) = [u, v] \otimes w + u \otimes [v, w]$ para todos $u, v, w \in B$.

DEFINICIÓN 1.5. Una biálgebra de Lie es *involutiva* si verifica que $[,] \circ \delta = 0$.

PROPOSICIÓN 1.1. *Sea $(B, [,], \delta)$ una biálgebra de Lie de dimensión finita. Entonces B^* tiene estructura de biálgebra de Lie, definiendo los mapas corchete y cocorchete como:*

$$\begin{aligned} [,]^* : B^* \otimes B^* &\rightarrow B^* \quad y \quad \delta^* : B^* \rightarrow B^* \otimes B^*. \\ [\phi, \psi]^*(x) &= (\phi \otimes \psi)(\delta(x)) \quad \delta^*(\phi)(x \otimes y) = \phi([x, y]) \end{aligned}$$

2. Ejemplos de biálgebras de Lie

EJEMPLO 2.1. Sea $b_+ = \langle H, X \rangle$ el \mathbb{C} -espacio vectorial generado por H y X . Definimos el mapa $[,] : b_+ \otimes b_+ \rightarrow b_+$ lineal y antisimétrico tal que $[H, X] = 2X$ y el mapa $\delta : b_+ \rightarrow b_+ \otimes b_+$ lineal y coantisimétrico tal que $\delta(H) = 0$ y $\delta(X) = \frac{1}{2}(X \otimes H - H \otimes X)$. Entonces es $(b_+, [,], \delta)$ una biálgebra de Lie.

(i) *Condición de Jacobi:*

$$\begin{aligned} [X, [X, H]] + [X, [H, X]] + [H, [X, X]] &= [X, -2X] + [X, 2X] \\ &= 0, \\ [H, [X, H]] + [X, [H, H]] + [H, [H, X]] &= [H, -2X] + [H, 2X] \\ &= -4X + 4X \\ &= 0. \end{aligned}$$

(ii) *Condición de co-Jacobi:*

$$\begin{aligned} (id + \varepsilon + \varepsilon^2) \circ (id \otimes \delta) \circ \delta(H) &= 0 \\ (id + \varepsilon + \varepsilon^2) \circ (id \otimes \delta) \circ \delta(X) &= \frac{1}{2}(id + \varepsilon + \varepsilon^2)(id \otimes \delta)(X \otimes H - H \otimes X) \\ &= \frac{1}{2}(id + \varepsilon + \varepsilon^2)(X \otimes \delta(H) - H \otimes \delta(X)) \\ &= -\frac{1}{4}(id + \varepsilon + \varepsilon^2)(H \otimes X \otimes H - H \otimes H \otimes X) \\ &= H \otimes X \otimes H - H \otimes H \otimes X + X \otimes H \otimes H \\ &\quad - H \otimes X \otimes H + H \otimes H \otimes X - X \otimes H \otimes H \\ &= 0. \end{aligned}$$

(iii) *Compatibilidad:*

$$\begin{aligned}
\delta([H, X]) &= \delta(2X) \\
&= X \otimes H - H \otimes X, \\
H \cdot \delta(X) - X \cdot \delta(H) &= H \cdot \left(\frac{1}{2}(X \otimes H - H \otimes X)\right) \\
&= \frac{1}{2}([H, X] \otimes H + X \otimes [H, H] - [H, H] \otimes X - H \otimes [H, X]) \\
&= \frac{1}{2}(2X \otimes H - H \otimes 2X) \\
&= X \otimes H - H \otimes X.
\end{aligned}$$

Entonces $\delta([H, X]) = H \cdot \delta(X) - X \cdot \delta(H)$.

EJEMPLO 2.2. Sea $sl_2 = \langle H, X_{\pm} \rangle$ el \mathbb{C} -espacio vectorial generado por H, X_+ y X_- . Definimos el mapa $[\cdot, \cdot] : sl_2 \otimes sl_2 \rightarrow sl_2$ lineal y antisimétrico tal que $[X_+, X_-] = H$ y $[H, X_{\pm}] = \pm 2X_{\pm}$ y el mapa $\delta : sl_2 \rightarrow sl_2 \otimes sl_2$ lineal y coantisimétrico tal que $\delta(H) = 0$ y $\delta(X_{\pm}) = \frac{1}{2}(X_{\pm} \otimes H - H \otimes X_{\pm})$. Entonces es $(sl_2, [\cdot, \cdot], \delta)$ una biálgebra de Lie.

(i) *Condición de Jacobi:*

$$\begin{aligned}
[H, [H, X_{\pm}]] + [H, [X_{\pm}, X]] + [X_{\pm}, [H, H]] &= 0 \quad [\text{idem ejemplo 2.1}], \\
[X_{\pm}, [H, X_{\pm}]] + [H, [X_{\pm}, X_{\pm}]] + [X_{\pm}, [X_{\pm}, H]] &= 0 \quad [\text{idem ejemplo 2.1}], \\
[X_+, [H, X_-]] + [H, [X_-, X_+]] + [X_-, [X_+, H]] &= [X_+, -2X_-] + [H, -H] + [X_-, -2X_+] \\
&= -2H + 2H \\
&= 0, \\
[X_+, [X_+, X_-]] + [X_+, [X_-, X_+]] + [X_-, [X_+, X_+]] &= [X_+, H] + [X_+, -H] \\
&= -2X_+ 2X_+ \\
&= 0, \\
[X_-, [X_-, X_+]] + [X_-, [X_+, X_-]] + [X_+, [X_-, X_-]] &= [X_-, -H] + [X_-, H] \\
&= -2X_- + 2X_- \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(ii) *Condición de co-Jacobi:*

$$\begin{aligned}
(id + \varepsilon + \varepsilon^2) \circ (id \otimes \delta) \circ \delta(H) &= 0 \quad [\text{definición de } \delta], \\
(id + \varepsilon + \varepsilon^2) \circ (id \otimes \delta) \circ \delta(X_{\pm}) &= 0 \quad [\text{idem ejemplo 2.1}].
\end{aligned}$$

(iii) *Compatibilidad:*

$$\begin{aligned}
\delta([H, X_{\pm}]) &= H \cdot \delta(X_{\pm}) - X_{\pm} \cdot \delta(H) \quad [\text{idem ejemplo 2.1}] \\
\delta([X_+, X_-]) &= \delta(H) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_+ \cdot \delta(X_-) &= X_+ \cdot \frac{1}{2}(X_- \otimes H - H \otimes X_-) \\
&= \frac{1}{2}([X_+, X_-] \otimes H + X_- \otimes [X_+, H] - [X_+, H] \otimes X_- - H \otimes [X_+, X_-]) \\
&= \frac{1}{2}(H \otimes H + X_- \otimes -2X_+ + 2X_+ \otimes X_- - H \otimes H) \\
&= -X_- \otimes X_+ + X_+ \otimes X_-,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_- \cdot \delta(X_+) &= X_- \cdot \frac{1}{2}(X_+ \otimes H - H \otimes X_+) \\
&= \frac{1}{2}([X_-, X_+] \otimes H + X_+ \otimes [X_-, H] - [X_-, H] \otimes X_+ - H \otimes [X_-, X_+]) \\
&= \frac{1}{2}(-H \otimes H + X_+ \otimes -2X_- + 2X_- \otimes X_+ - H \otimes -H) \\
&= -X_+ \otimes X_- + X_- \otimes X_+.
\end{aligned}$$

Entonces $X_+ \cdot \delta(X_-) + X_- \cdot \delta(X_+) = (X_+ \otimes X_- - X_- \otimes X_+) + (X_- \otimes X_+ - X_+ \otimes X_-) = 0$.
Luego es $\delta([X_+, X_-]) = X_+ \cdot \delta(X_-) + X_- \cdot \delta(X_+)$.

EJEMPLO 2.3. Sea $sl_2^* = \langle \Phi, \Psi_{\pm} \rangle$ el \mathbb{C} -espacio vectorial generado por Φ, Ψ_+ y Ψ_- . Definimos el mapa $[\cdot, \cdot] : sl_2^* \otimes sl_2^* \rightarrow sl_2^*$ lineal y antisimétrico tal que $[\Psi_{\pm}, \Phi] = \frac{1}{2}\Psi_{\pm}$ y $[\Psi_+, \Psi_-] = 0$ y el mapa $\delta : sl_2^* \rightarrow sl_2^* \otimes sl_2^*$ lineal y coantisimétrico tal que $\delta(\Psi_{\pm}) = \pm 2(\Phi \otimes \Psi_{\pm} - \Psi_{\pm} \otimes \Phi)$ y $\delta(\Phi) = \Psi_+ \otimes \Psi_- - \Psi_- \otimes \Psi_+$. Entonces es $(sl_2^*, [\cdot, \cdot], \delta)$ una biálgebra de Lie.

(i) *Condición de Jacobi:*

$$\begin{aligned}
[\Phi, [\Psi_{\pm}, \Phi]] + [\Psi_{\pm}, [\Phi, \Phi]] + [\Phi, [\Phi, \Psi_{\pm}]] &= [\Phi, \frac{1}{2}\Psi_{\pm}] - [\Phi, \frac{1}{2}\Psi_{\pm}] \\
&= 0, \\
[\Psi_{\pm}, [\Phi, \Psi_{\pm}]] + [\Phi, [\Psi_{\pm}, \Psi_{\pm}]] + [\Psi_{\pm}, [\Psi_{\pm}, \Phi]] &= -[\Psi_{\pm}, \frac{1}{2}\Psi_{\pm}] + [\Psi_{\pm}, \frac{1}{2}\Psi_{\pm}] \\
&= 0, \\
[\Phi, [\Psi_+, \Psi_-]] + [\Psi_+, [\Psi_-, \Phi]] + [\Psi_-, [\Phi, \Psi_+]] &= \frac{1}{2}[\Psi_+, \Psi_-] - \frac{1}{2}[\Psi_-, \Psi_+] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(ii) *Condición de co-Jacobi:*

$$\begin{aligned}
(id + \varepsilon + \varepsilon^2) \circ (id \otimes \delta) \circ \delta(\Phi) &= (id + \varepsilon + \varepsilon^2) \circ (id \otimes \delta)(\Psi_+ \otimes \Psi_- - \Psi_- \otimes \Psi_+) \\
&= (id + \varepsilon + \varepsilon^2)(-2\Psi_+ \otimes \Phi \otimes \Psi_- + 2\Psi_+ \otimes \Psi_- \otimes \Phi \\
&\quad - 2\Psi_- \otimes \Phi \otimes \Psi_+ + 2\Psi_- \otimes \Psi_+ \otimes \Phi) \\
&= -2\Psi_+ \otimes \Phi \otimes \Psi_- + 2\Psi_+ \otimes \Psi_- \otimes \Phi - 2\Psi_- \otimes \Phi \otimes \Psi_+ \\
&\quad + 2\Psi_- \otimes \Psi_+ \otimes \Phi - 2\Phi \otimes \Psi_- \otimes \Psi_+ + 2\Psi_- \otimes \Phi \otimes \Psi_+ \\
&\quad - 2\Phi \otimes \Psi_+ \otimes \Psi_- + 2\Psi_+ \otimes \Phi \otimes \Psi_- - 2\Psi_- \otimes \Psi_+ \otimes \Phi \\
&\quad + 2\Phi \otimes \Psi_+ \otimes \Psi_- - 2\Psi_+ \otimes \Psi_- \otimes \Phi + 2\Phi \otimes \Psi_- \otimes \Psi_+ \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(id + \varepsilon + \varepsilon^2) \circ (id \otimes \delta) \circ \delta(\Psi_{\pm}) &= (id + \varepsilon + \varepsilon^2) \circ (id \otimes \delta) \pm 2(\Phi \otimes \Psi_{\pm} - \Psi_{\pm} \otimes \Phi) \\
&= 2(id + \varepsilon + \varepsilon^2)(\pm 2(\Phi \otimes \Phi \otimes \Psi_{\pm} - \Phi \otimes \Psi_{\pm} \otimes \Phi) \\
&\quad - \Psi_{\pm} \otimes \Psi_+ \otimes \Psi_- + \Psi_{\pm} \otimes \Psi_- \otimes \Psi_+) \\
&= 2(\pm 2(\Phi \otimes \Phi \otimes \Psi_{\pm} - \Phi \otimes \Psi_{\pm} \otimes \Phi + \Phi \otimes \Psi_{\pm} \otimes \Phi \\
&\quad - \Psi_{\pm} \otimes \Phi \otimes \Phi + \Psi_{\pm} \otimes \Phi \otimes \Phi - \Phi \otimes \Phi \otimes \Psi_{\pm}) \\
&\quad - \Psi_{\pm} \otimes \Psi_+ \otimes \Psi_- + \Psi_{\pm} \otimes \Psi_- \otimes \Psi_+ - \Psi_+ \otimes \Psi_- \otimes \Psi_{\pm} \\
&\quad + \Psi_- \otimes \Psi_+ \otimes \Psi_{\pm} - \Psi_- \otimes \Psi_{\pm} \otimes \Psi_+ + \Psi_+ \otimes \Psi_{\pm} \otimes \Psi_-) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(iii) *Compatibilidad:*

$$\begin{aligned}
\delta([\Psi_+, \Psi_-]) &= 0, \\
\Psi_+ \cdot \delta(\Psi_-) - \Psi_- \cdot \delta(\Psi_+) &= \Psi_+ \cdot -2(\Phi \otimes \Psi_- - \Psi_- \otimes \Phi) - \Psi_- \cdot 2(\Phi \otimes \Psi_+ - \Psi_+ \otimes \Phi) \\
&= -2[\Psi_+, \Phi] \otimes \Psi_- - 2\Phi \otimes [\Psi_+, \Psi_-] + 2[\Psi_+, \Psi_-] \otimes \Phi + 2\Psi_- \otimes [\Psi_+, \Phi] \\
&\quad - 2[\Psi_-, \Phi] \otimes \Psi_+ - 2\Phi \otimes [\Psi_-, \Psi_+] + 2[\Psi_-, \Psi_+] \otimes \Phi + 2\Psi_+ \otimes [\Psi_-, \Phi] \\
&= -2[\Psi_+, \Phi] \otimes \Psi_- + 2\Psi_- \otimes [\Psi_+, \Phi] - 2[\Psi_-, \Phi] \otimes \Psi_+ + 2\Psi_+ \otimes [\Psi_-, \Phi] \\
&= -\Psi_+ \otimes \Psi_- - \Psi_- \otimes \Psi_+ + \Psi_- \otimes \Psi_+ + \Psi_+ \otimes \Psi_- \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Entonces $\delta([\Psi_+, \Psi_-]) = \Psi_+ \cdot \delta(\Psi_-) - \Psi_- \cdot \delta(\Psi_+)$.

$$\begin{aligned}
\delta([\Psi_\pm, \Phi]) &= \delta\left(\frac{1}{2}\Psi_\pm\right) \\
&= \pm(\Phi \otimes \Psi_\pm - \Psi_\pm \otimes \Phi), \\
\Psi_\pm \cdot \delta(\Phi) - \Phi \cdot \delta(\Psi_\pm) &= \Psi_\pm \cdot (\Psi_+ \otimes \Psi_- - \Psi_- \otimes \Psi_+) - \Phi \cdot (\pm 2(\Phi \otimes \Psi_\pm - \Psi_\pm \otimes \Phi)) \\
&= [\Psi_\pm, \Psi_+] \otimes \Psi_- + \Psi_+ \otimes [\Psi_\pm, \Psi_-] - [\Psi_\pm, \Psi_-] \otimes \Psi_+ - \Psi_- \otimes [\Psi_\pm, \Psi_+] \\
&\mp 2([\Phi, \Phi] \otimes \Psi_\pm + \Phi \otimes [\Phi, \Psi_\pm] - [\Phi, \Psi_\pm] \otimes \Phi - \Psi_\pm \otimes [\Phi, \Phi]) \\
&= \mp 2(\Phi \otimes [\Phi, \Psi_\pm] - [\Phi, \Psi_\pm] \otimes \Phi) \\
&= \pm(\Phi \otimes \Psi_\pm - \Psi_\pm \otimes \Phi).
\end{aligned}$$

Entonces $\delta([\Psi_\pm, \Phi]) = \Psi_\pm \cdot \delta(\Phi) - \Phi \cdot \delta(\Psi_\pm)$.

Otra forma de demostrar que $(sl_2^*, [,], \delta)$ es una biálgebra de Lie es probando que esta estructura es la dual de $(sl_2, [,], \delta)$ del ejemplo anterior, luego por la proposición 1.1 es sl_2^* una biálgebra de Lie.

Tenemos que $\phi(H) = 1$, $\psi_+(X_+) = 1$ y $\psi_-(X_-) = 1$ y el resto son cero.

Veamos que las estructuras son las duales.

$$\begin{aligned}
\delta(\psi_+)(H \otimes X_+) &= 2(\phi \otimes \psi_+ - \psi_+ \otimes \phi)(H \otimes X_+) = 2 = \psi_+([H, X_+]), \\
\delta(\phi)(X_+ \otimes X_-) &= (\psi_+ \otimes \psi_- - \psi_- \otimes \psi_+)(X_+ \otimes X_-) = 1 = \phi(H), \\
(\psi_+ \otimes \phi)(\delta X_+) &= (\psi_+ \otimes \phi)\left(\frac{1}{2}(X_+ \otimes H - H \otimes X_+)\right) = \frac{1}{2}\psi_+(X_+)\phi(H) = \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\psi_+(X_+) = [\psi_+, \phi](X_+),
\end{aligned}$$

de forma similar se prueba para ψ_- y para el resto de los casos es más fácil. Entonces la estructura es la dual.

CAPÍTULO 2

Biálgebra de Lie de curvas sobre una superficie

Este capítulo se divide en dos secciones. En la primera sección definiremos el espacio de las curvas sobre una superficie y demostraremos que tiene estructura de álgebra de Lie (un estudio más completo de este resultado puede encontrarse en [3]). En la segunda sección demostraremos que el espacio de las curvas sobre una superficie tiene estructura de biálgebra de Lie. Una descripción más detallada de este resultado se puede encontrar en [10] y [5].

1. Espacio de curvas sobre una superficie, estructura de álgebra de Lie

Sea M una superficie orientada, conexa (no necesariamente compacta). Sea $\pi = \pi_1(M)$ el grupo fundamental y $\hat{\pi}$ el conjunto de las clases de homotopía libre de las curvas en M .

DEFINICIÓN 1.1. Definimos el *espacio de curvas sobre la superficie M* como el \mathbb{Z} -módulo libre con base $\hat{\pi}$ y lo notamos por $\mathbb{Z}\hat{\pi}$.

Si $\alpha \in \pi$ y denotamos por $|\alpha|$ su clase de conjugación, entonces el mapa $\pi \rightarrow \hat{\pi}$ dado por $\alpha \mapsto |\alpha|$ se extiende por aditividad a un morfismo de \mathbb{Z} -módulos $|\cdot| : \mathbb{Z}\pi \rightarrow \mathbb{Z}\hat{\pi}$.

Si α es una curva cerrada en M y $p \in \alpha$ es un punto simple, es decir si $f : S^1 \rightarrow M$ es una parametrización de α entonces $f^{-1}(p)$ es conexo, notamos por α_p su clase de homotopía en $\pi_1(M, p)$.

A continuación daremos la definición de índice de intersección de dos curvas en π . Para dar esta definición podemos asumir que α y β son curvas inmersas en M genéricas, es decir el mapa $\alpha \cup \beta : S^1 \cup S^1 \rightarrow M$ es una inmersión con a lo sumo puntos dobles transversales (ver la definición 2.9 en el apéndice A).

Notamos por $\alpha \# \beta$ al conjunto de los puntos dobles transversales de $\alpha \cup \beta$ que corresponden a la intersección de α con β .

DEFINICIÓN 1.2. Dado $p \in \alpha \# \beta$, definimos el *índice de intersección* de α y β en p como:

$$\varepsilon(p; \alpha, \beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \{\alpha'(p), \beta'(p)\} \text{ es una base positiva de } T_p M, \\ -1 & \text{si } \{\alpha'(p), \beta'(p)\} \text{ es una base negativa de } T_p M. \end{cases}$$

OBSERVACIÓN 1.1. Sea $p \in \alpha \# \beta$, entonces son $\alpha_p \beta_p$ y $\beta_p \alpha_p$ conjugadas, porque $\beta_p \alpha_p = \beta_p \alpha_p \beta_p \beta_p^{-1}$. En particular tenemos que $|\beta_p \alpha_p| = |\alpha_p \beta_p|$.

DEFINICIÓN 1.3. Sean α y β curvas inmersas en M genéricas. Definimos el mapa

$$[,] : \mathbb{Z}\widehat{\pi} \otimes \mathbb{Z}\widehat{\pi} \rightarrow \mathbb{Z}\widehat{\pi}$$

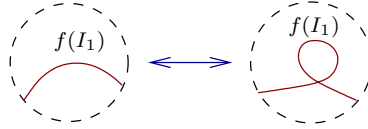
dado por

$$[|\alpha|, |\beta|] = \sum_{p \in \alpha \# \beta} \varepsilon(p; \alpha, \beta) |\alpha_p \beta_p|,$$

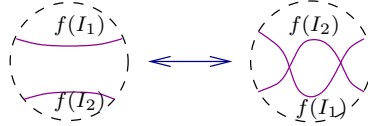
luego lo extendemos linealmente.

LEMA 1.1. Sean $f, g \in \text{Inm}(S, M)_0$ inmersiones genéricas homotópicas en $C^\infty(S, M)$. Entonces existe una familia de inmersiones genéricas $f_1 = f, f_2, \dots, f_{k-1}, f_k = g$ tales que f_{i+1} esta relacionada con f_i por uno de los siguientes movimientos:

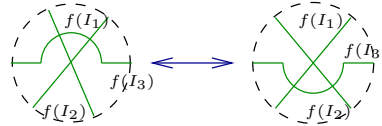
(m_1) Nacimiento-muerte de monógonos



(m_2) Nacimiento-muerte de bígonos



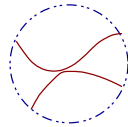
(m_3) Salto sobre un punto doble



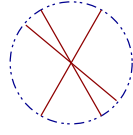
Para aplicar los movimientos (m_j) al mapa $f \in \text{Inm}(S, M)_0$ encontramos j intervalos I_1, \dots, I_j ($1 \leq j \leq 3$) donde $f|_I$ (siendo $I = I_1 \cup I_2 \dots \cup I_j$) es una de las figuras marcadas por (w_j). Reemplazamos $f|_I$ por la otra figura, donde $f|_{S \setminus I}$ es fijo. (Los mapas son inmersiones sobre $f(S \setminus I)$ y no son encajes).

DEMOSTRACIÓN. Sea $\text{Inm}(S, M)_1$ el conjunto de inmersiones $f : S \rightarrow M$ con una cantidad finita de puntos dobles transversales y con exactamente una de las siguientes singularidades:

- punto doble tangencial



- punto triple transversal



Aplicando resultados de transversalidad tenemos que la codimensión de $Inm(S, M)_1$ es uno en $Inm(S, M)$.

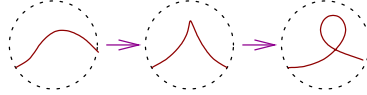
Consideremos el conjunto $\mathcal{C} \subset C^\infty(S, M)$ definido como sigue

$$\mathcal{C} := \{f \in C^\infty(S, M) : \exists! x \in M/f|_{S \setminus \{x\}} \in Inm(S \setminus \{x\}, M)_0, df(x) = 0 \text{ y } d^2f(x) \neq 0\}.$$

Entonces $\mathcal{C} \cup Inm(S, M)_1 = C^\infty(S, M)_1$ tiene codimensión uno en $C^\infty(S, M)$.

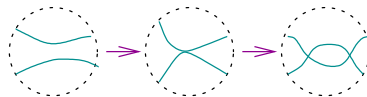
Como $f, g \in C^\infty(S, M)_0$ son homotópicas, por transversalidad podemos construir una homotopía vía una familia genérica en $C^\infty(S, M)$, es decir una familia $F_t : S \rightarrow M$ que quede completamente contenida en $Inm(S, M)_0 \cup C^\infty(S, M)_1$ y cortando a $C^\infty(S, M)_1$ transversalmente. Esto es posible porque la codimensión de $C^\infty(S, M) \setminus (Inm(S, M)_0 \cup C^\infty(S, M)_1)$ es dos en $C^\infty(S, M)$ y $C^\infty(S, M)$ tiene codimensión uno en $C^\infty(S, M)$. Por lo tanto esta es una homotopía $F_t : S \rightarrow M$ donde $F_0 = f, F_1 = g$ y tal que $F_t \in Inm(S, M)_0 \cup C^\infty(S, M)_1$ para todo $0 \leq t \leq 1$ y solo para un número finito de valores de t ($t = t_1, \dots, t_k$) es $F_t \in C^\infty(S, M)_1$. Sobre cada intervalo abierto (t_i, t_{i+1}) esta homotopía está caracterizada por una isotopía de M . Cuando $F_t \in C^\infty(S, M)_1$ tenemos tres posibilidades:

- i) $F_t \in \mathcal{C}$. En este caso la homotopía en un entorno del punto singular $x \in S$ es una homotopía entre los mapas:



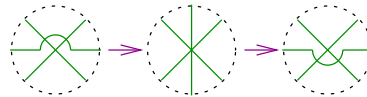
Este caso corresponde al caso (m_1) .

- ii) $F_t \in Inm(S, M)_1$ y tiene un punto doble tangencial. En este caso la homotopía en un entorno de las dos preimágenes del punto doble tangencial se puede ver como



y esto corresponde al caso (m_2) .

- iii) $F_t \in Inm(S, M)_1$ y tiene un punto triple. En este caso la homotopía se puede ver como



y esto corresponde al caso (m_3) .

Finalmente consideremos $0 < \varepsilon < \min_{i=1, \dots, k-1} (t_{i+1} - t_i)$ y sean $f_1 = f, f_k = g$ y $f_{i+1} = F_{t_1 + \varepsilon}$.

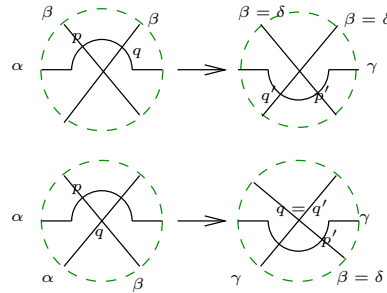
A continuación probaremos que $[[\alpha], |\beta|]$ solo depende de la clase de homotopía de α y β .

TEOREMA 1.2. *Sean α y β un par genérico de curvas inmersas en M y sean γ y δ otro de estos pares tales que γ es homotópica a α y δ es homotópica a β . Entonces $[\alpha, \beta] = [\gamma, \delta]$ en $\mathbb{Z}\hat{\pi}$.*

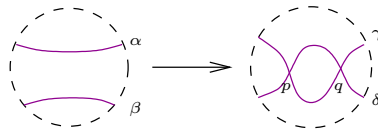
DEMOSTRACIÓN. Consideremos la variedad de dimensión uno $I = S^1 \cup S^1$ unión disjunta de dos círculos y $f = \alpha \cup \beta \in \text{Inm}(I, M)$, $g = \gamma \cup \delta \in \text{Inm}(I, M)$, aplicando el lema 1.1 el problema se reduce a probar que $[[\alpha], |\beta|] = [[\gamma], |\delta|]$ donde $\alpha \cup \beta$ y $\gamma \cup \delta$ están relacionadas por uno de los tres movimientos (m_1) , (m_2) o (m_3) .

Como (m_1) no afecta la intersección $\alpha \# \beta$ y $\alpha \sim \gamma$ y $\beta \sim \delta$ tenemos que $[[\alpha], |\beta|] = [[\gamma], |\delta|]$.

Ahora supongamos que $\alpha \cup \beta$ y $\gamma \cup \delta$ están relacionados por (m_3) . Podemos asumir que $\alpha \# \beta \neq \gamma \# \delta$, porque si $\alpha \# \beta = \gamma \# \delta$ es claro que $[[\alpha], |\beta|] = [[\gamma], |\delta|]$. Entonces existe un par de puntos dobles $\{p, q\}$ en $\alpha \# \beta$, que aplicando la homotopía se convierte en un par de puntos dobles $\{p', q'\}$ en $\gamma \# \delta$ y $\alpha \# \beta - \{p, q\} = \gamma \# \delta - \{p', q'\}$. Entonces solo hay que ver que pasa en estos pares de puntos. Consideremos un disco $D \subset M$ que contiene a estos puntos. En el interior de D podemos encontrar un arco de p a p' (respectivamente de q a q') que induce un isomorfismo $\pi_1(M, p) \cong \pi_1(M, p')$ (respectivamente $\pi_1(M, q) \cong \pi_1(M, q')$) que lleva α_p, β_p a $\gamma_{p'}, \delta_{p'}$ (respectivamente α_q, β_q a $\gamma_{q'}, \delta_{q'}$) correspondientemente. En particular se cumple que $|\alpha_p \beta_p| = |\gamma_{p'} \delta_{p'}|$ y $|\alpha_q \beta_q| = |\gamma_{q'} \delta_{q'}|$. Además $\varepsilon(p; \alpha, \beta) = \varepsilon(p'; \gamma, \delta)$ y $\varepsilon(q; \alpha, \beta) = \varepsilon(q'; \gamma, \delta)$. Entonces es $[[\alpha], |\beta|] = [[\gamma], |\delta|]$. Veamos algunos de estos casos



Finalmente supongamos que $\alpha \cup \beta$ y $\gamma \cup \delta$ están relacionadas por (m_2) . Si $\alpha \# \beta = \gamma \# \delta$, como antes no hay nada que probar. Supongamos que $\gamma \# \delta = \alpha \# \beta \cup \{p, q\}$ donde p y q son los vértices de un bígono cuyos lados son arcos de γ y δ .



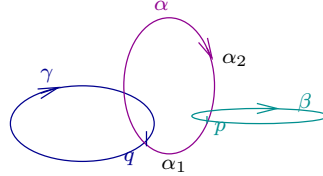
Ahora $\gamma_p \delta_p$ y $\gamma_q \delta_q$ son homotópicas y $\varepsilon(p; \gamma, \delta) = -\varepsilon(q; \gamma, \delta)$. Entonces $[[\alpha], |\beta|] = [[\gamma], |\delta|]$.



LEMA 1.3. Sean α , β y γ curvas cerradas, orientadas e inmersas en M y sean $p \in \alpha \# \beta$ y $q \in \alpha \# \beta \# \gamma$, entonces

- i) Si $q \in \alpha \# \gamma$ tenemos que $|(\alpha_p \beta_p)_q \gamma_q| = |(\gamma_q \alpha_q)_p \beta_p|$.
- ii) Si $q \in \beta \# \gamma$ tenemos que $|(\alpha_p \beta_p)_q \gamma_q| = |(\beta_q \gamma_q)_p \alpha_p|$.

DEMOSTRACIÓN. i) Hay que ver que $(\alpha_p \beta_p)_q \gamma_q$ y $(\gamma_q \alpha_q)_p \beta_p$ son homotópicas.



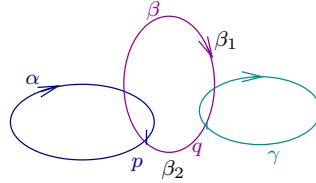
Como p y $q \in \alpha$ podemos descomponer a α en dos curvas α_1 y α_2 tales que $\alpha_p = \alpha_1 \alpha_2$, donde α_1 comienza en p termina en q y α_2 comienza en q y termina en p . Entonces tenemos que

$$(\alpha_p \beta_p)_q = \alpha_2 \beta_p \alpha_1 \quad \text{entonces}$$

$$(\alpha_p \beta_p)_q \gamma_q = \alpha_2 \beta_p \alpha_1 \gamma_q \sim \alpha_1 \gamma_q \alpha_2 \beta_p \quad [\text{aplicando la obs. 1.1}].$$

Por otro lado tenemos que $(\gamma_q \alpha_q)_p \beta_p = \alpha_1 \gamma_q \alpha_2 \beta_p$. Entonces $(\alpha_p \beta_p)_q \gamma_q \sim (\gamma_q \alpha_q)_p \beta_p$. Luego es $|(\alpha_p \beta_p)_q \gamma_q| = |(\gamma_q \alpha_q)_p \beta_p|$.

- ii) Si $q \in \beta \# \gamma$, podemos descomponer β en dos curvas β_1 y β_2 tales que $\beta_p = \beta_1 \beta_2$, donde β_1 comienza en p y termina en q y β_2 comienza en q y termina en p .



Entonces tenemos que

$$(\alpha_p \beta_p)_q = \beta_2 \alpha_p \beta_1.$$

$$(\alpha_p \beta_p)_q \gamma_q = \beta_2 \alpha_p \beta_1 \gamma_q \sim \beta_1 \gamma_q \beta_2 \alpha_p \quad [\text{aplicando la obs. 1.1}].$$

Por otro lado tenemos que $(\beta_q \gamma_q)_p \alpha_p = \beta_1 \gamma_q \beta_2 \alpha_p$. Entonces $(\alpha_p \beta_p)_q \gamma_q \sim (\beta_q \gamma_q)_p \alpha_p$. Luego es $|(\alpha_p \beta_p)_q \gamma_q| = |(\beta_q \gamma_q)_p \alpha_p|$.



TEOREMA 1.4. $(\mathbb{Z}\hat{\pi}, [,])$ es un álgebra de Lie.

DEMOSTRACIÓN. 1) *Condición de antisimetría:* Sea $p \in \alpha \# \beta$, por la observación 1.1 $\alpha_p \beta_p$ y $\beta_p \alpha_p$ son conjugadas en $\pi_1(M, p)$, es decir $|\alpha_p \beta_p| = |\beta_p \alpha_p|$.

Por otro lado $\varepsilon(p; \alpha, \beta) = -\varepsilon(p; \beta, \alpha)$ por definición de índice de intersección. Entonces

$$[|\alpha|, |\beta|] = \sum_{p \in \alpha \# \beta} \varepsilon(p; \alpha, \beta) |\alpha_p \beta_p| = - \sum_{p \in \alpha \# \beta} \varepsilon(p; \beta, \alpha) |\beta_p \alpha_p| = -[|\beta|, |\alpha|].$$

2) *Condición de Jacobi*: $[[[\alpha], |\beta|], |\gamma|] + [[|\beta|, |\gamma|], |\alpha|] + [[|\gamma|, |\alpha|], |\beta|] = 0$.

$$\begin{aligned} [[[\alpha], |\beta|], |\gamma|] &= \sum_{p \in \alpha \# \beta} \varepsilon(p; \alpha, \beta) [|\alpha_p \beta_p|, |\gamma|] \\ &= \sum_{p \in \alpha \# \beta} \varepsilon(p; \alpha, \beta) \sum_{q \in (\alpha \cup \beta) \# \gamma} \varepsilon(q; \alpha_p \beta_p, \gamma) |(\alpha_p \beta_p)_q \gamma_q|. \end{aligned}$$

$$\text{Notación : } [[[\alpha], |\beta|]_p, |\gamma|]_q = \varepsilon(p; \alpha, \beta) \varepsilon(q; \alpha_p \beta_p, \gamma) |(\alpha_p \beta_p)_q \gamma_q|.$$

Dado que $q \in (\alpha \cup \beta) \# \gamma$, hay dos posibilidades $q \in \alpha \# \gamma$ o $q \in \beta \# \gamma$. Supongamos que $q \in \alpha \# \gamma$, entonces en el corchete $[[\gamma], |\alpha|], |\beta|$ aparece el sumando

$$[[[\alpha], |\beta|]_p, |\gamma|]_q = \varepsilon(q; \gamma, \alpha) \varepsilon(p; \gamma_q \alpha_p, \beta) |(\gamma_q \alpha_p)_p \beta_p|.$$

Este termino se cancela con el sumando $[[|\gamma|, |\alpha|]_q, |\beta|]_p$ de $[[|\gamma|, |\alpha|], |\beta|]$. Aplicando el lema 1.3 tenemos que $|(\alpha_p \beta_p)_q \gamma_q| = |(\gamma_q \alpha_p)_p \beta_p|$. Por otro lado

$$\begin{aligned} \varepsilon(p; \alpha, \beta) \varepsilon(q; \alpha_p \beta_p, \gamma) &= \varepsilon(p; \alpha, \beta) \varepsilon(q; \alpha, \gamma) \\ &= -\varepsilon(p; \alpha, \beta) \varepsilon(q; \gamma, \alpha) \\ &= -\varepsilon(q; \gamma, \alpha) \varepsilon(p; \gamma_q \alpha_p, \beta). \end{aligned}$$

Entonces

$$[[[\alpha], |\beta|]_p, |\gamma|]_q = -[[|\gamma|, |\alpha|]_q, |\beta|]_p.$$

Si $q \in \beta \# \gamma$ de igual forma se puede ver que $[[[\alpha], |\beta|]_p, |\gamma|]_q$ se cancela con $[[|\beta|, |\gamma|]_q, |\alpha|]_p$.

Entonces tenemos que

$$[[[\alpha], |\beta|], |\gamma|] + [[|\gamma|, |\alpha|], |\beta|] + [[|\beta|, |\gamma|], |\alpha|] = 0.$$



2. Espacio de curvas sobre una superficie, estructura de biálgebra de Lie

Sea $\mathbb{Z}\hat{\pi}$ el espacio de las curvas sobre una superficie definido en la sección anterior. Para una curva no contractible $\alpha : S^1 \rightarrow M$ notamos por $\langle \alpha \rangle_0$ la clase de $\langle \alpha \rangle$ en $\hat{\pi} \subset \mathbb{Z}\hat{\pi}$. Para una curva contractible α definimos $\langle \alpha \rangle_0 = 0 \in \mathbb{Z}\hat{\pi}$.

Sea α una curva genérica en $\mathbb{Z}\hat{\pi}$. Notamos por $\#\alpha$ al conjunto (finito) de sus puntos dobles $\{q \in \alpha(S^1) : \#\alpha^{-1}(q) > 1\}$. En cada punto $q \in \#\alpha$ α es transversal y los vectores tangentes a α en q son linealmente independientes. Llamamos a estos vectores u_1, u_2 tal que el par $\{u_1, u_2\}$ está positivamente orientado.

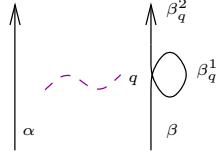
Para $i = 1, 2$ definimos α_q^i las curvas que comienzan en q y recorren α en dirección de u_i terminando en q . Es fácil probar que $\alpha = \alpha_q^1 \alpha_q^2$.

DEFINICIÓN 2.1. Definimos la transformación lineal $\nu : \mathbb{Z}\widehat{\pi} \rightarrow \mathbb{Z}\widehat{\pi} \otimes \mathbb{Z}\widehat{\pi}$, como

$$\nu(\langle \alpha \rangle) = \sum_{q \in \#\alpha} \left(\langle \alpha_q^1 \rangle_0 \otimes \langle \alpha_q^2 \rangle_0 - \langle \alpha_q^2 \rangle_0 \otimes \langle \alpha_q^1 \rangle_0 \right).$$

Tenemos que probar que si α y β son homotópicas, entonces es $\nu(\langle \alpha \rangle) = \nu(\langle \beta \rangle)$. Aplicando el lema 1.1 basta probar esto para α y β relacionadas por alguno de los tres movimientos (m_1) , (m_2) o (m_3) .

i) Sean α y β homotópicas tales que

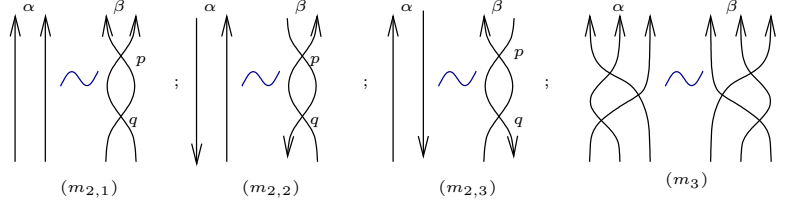


Entonces por un lado tenemos que $\nu(\langle \alpha \rangle) = 0$, porque no hay puntos de autointersección. Pero si calculamos $\nu(\langle \beta \rangle)$ tenemos que

$$\nu(\langle \beta \rangle) = \langle \beta_q^1 \rangle_0 \otimes \langle \beta_q^2 \rangle_0 - \langle \beta_q^2 \rangle_0 \otimes \langle \beta_q^1 \rangle_0,$$

como $\alpha \sim \beta$ es $\beta_q^1 \sim 0$, tenemos que $\nu(\langle \beta \rangle) = 0$.

ii) Sean α y β homotópicas tales que están relacionadas por alguno de los siguientes movimientos

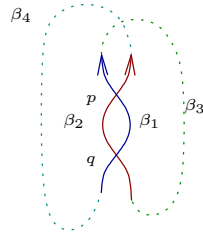


Entonces tenemos que $\nu(\langle \alpha \rangle) = 0$, por igual argumento que en caso anterior.

Calculemos ahora $\nu(\langle \beta \rangle)$,

$$\nu(\langle \beta \rangle) = \langle \beta_p^1 \rangle_0 \otimes \langle \beta_p^2 \rangle_0 - \langle \beta_p^2 \rangle_0 \otimes \langle \beta_p^1 \rangle_0 + \langle \beta_q^1 \rangle_0 \otimes \langle \beta_q^2 \rangle_0 - \langle \beta_q^2 \rangle_0 \otimes \langle \beta_q^1 \rangle_0.$$

Veamos el primero de los casos. Si describimos β como sigue



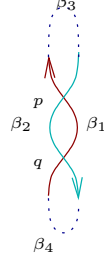
tenemos que $\langle \beta \rangle = \langle \beta_4 \beta_1 \rangle_0 \otimes \langle \beta_3 \beta_2 \rangle_0 - \langle \beta_3 \beta_2 \rangle_0 \otimes \langle \beta_4 \beta_1 \rangle_0 + \langle \beta_1 \beta_3 \rangle_0 \otimes \langle \beta_2 \beta_4 \rangle_0 - \langle \beta_2 \beta_4 \rangle_0 \otimes \langle \beta_1 \beta_3 \rangle_0$.

Como $\alpha \sim \beta$ es $\beta_1 \beta_2^{-1} \sim 0$, luego es $\beta_1 \sim \beta_2$. Entonces $\beta_3 \beta_2 \sim \beta_3 \beta_1 \sim \beta_1 \beta_3$, de igual forma $\beta_4 \beta_1 \sim \beta_2 \beta_4$.

Finalmente $\langle \beta \rangle = \langle \beta_2 \beta_4 \rangle_0 \otimes \langle \beta_1 \beta_3 \rangle_0 - \langle \beta_1 \beta_3 \rangle_0 \otimes \langle \beta_2 \beta_4 \rangle_0 + \langle \beta_1 \beta_3 \rangle_0 \otimes \langle \beta_2 \beta_4 \rangle_0 -$

$$\langle \beta_2 \beta_4 \rangle_0 \otimes \langle \beta_1 \beta_3 \rangle_0 = 0.$$

El segundo y el tercer caso son análogos, veamos a continuación el segundo caso.



$$\langle \beta \rangle = \langle \beta_3 \rangle_0 \otimes \langle \beta_2 \beta_4 \beta_1 \rangle_0 - \langle \beta_2 \beta_4 \beta_1 \rangle_0 \otimes \langle \beta_3 \rangle_0 + \langle \beta_4 \rangle_0 \otimes \langle \beta_1 \beta_3 \beta_2 \rangle_0 - \langle \beta_1 \beta_3 \beta_2 \rangle_0 \otimes \langle \beta_4 \rangle_0.$$

Primero recordar que $\beta_2 \beta_4 \beta_1 \sim \beta_1 \beta_2 \beta_4$. Por otro lado como $\alpha \sim \beta$ se cumple que $\beta_1 \beta_2 \beta_4 \sim \beta_4$ ó $\beta_1 \beta_2 \beta_4 \sim \beta_1 \beta_2$.

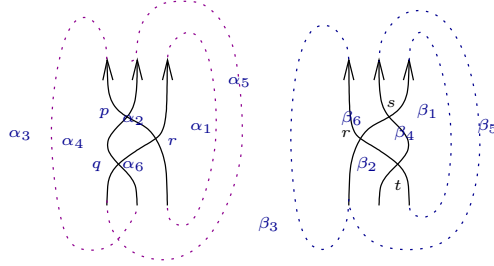
Si $\beta_1 \beta_2 \beta_4 \sim \beta_4$ es

$$\langle \beta \rangle = \langle \beta_3 \rangle_0 \otimes \langle \beta_4 \rangle_0 - \langle \beta_4 \rangle_0 \otimes \langle \beta_3 \rangle_0 - \langle \beta_4 \rangle_0 \otimes \langle \beta_3 \rangle_0 - \langle \beta_3 \rangle_0 \otimes \langle \beta_4 \rangle_0 = 0.$$

Si $\beta_1 \beta_2 \beta_4 \sim \beta_1 \beta_2$ tenemos que $\beta_1 \beta_3 \beta_2 \sim \beta_2 \beta_1$ (es decir $\beta_4 \sim 0$ y $\beta_3 \sim 0$) entonces

$$\langle \beta \rangle = \langle \beta_3 \rangle_0 \otimes \langle \beta_1 \beta_2 \rangle_0 - \langle \beta_1 \beta_2 \rangle_0 \otimes \langle \beta_3 \rangle_0 - \langle \beta_4 \rangle_0 \otimes \langle \beta_2 \beta_1 \rangle_0 - \langle \beta_1 \beta_2 \rangle_0 \otimes \langle \beta_4 \rangle_0 = 0.$$

iii) Veamos que $\langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle$ en los puntos p, q, r y r, s, t .

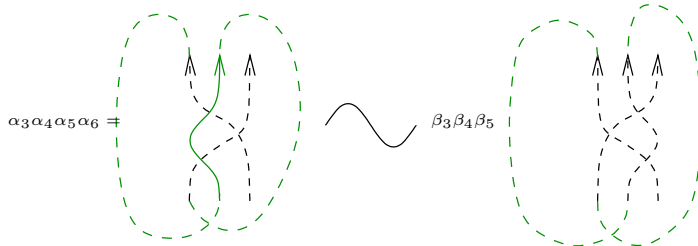


Por un lado tenemos que

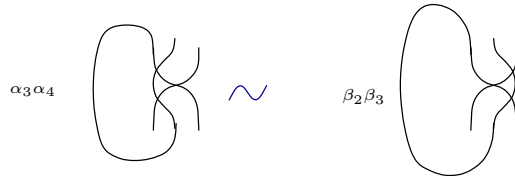
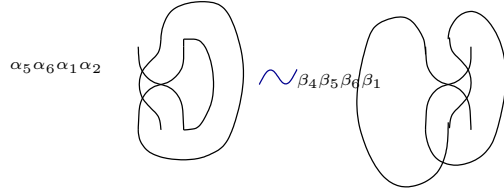
$$\begin{aligned} \langle \alpha \rangle_p &= \langle \alpha_5 \alpha_6 \alpha_1 \alpha_2 \rangle \otimes \langle \alpha_3 \alpha_4 \rangle - \langle \alpha_3 \alpha_4 \rangle \otimes \langle \alpha_5 \alpha_6 \alpha_1 \alpha_2 \rangle, \\ \langle \alpha \rangle_q &= \langle \alpha_6 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \rangle \otimes \langle \alpha_4 \alpha_5 \rangle - \langle \alpha_4 \alpha_5 \rangle \otimes \langle \alpha_6 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \rangle, \\ \langle \alpha \rangle_r &= \langle \alpha_1 \rangle \otimes \langle \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 \rangle - \langle \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 \rangle \otimes \langle \alpha_1 \rangle. \end{aligned}$$

Además tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \beta \rangle_r &= \langle \beta_6 \beta_1 \beta_2 \rangle \otimes \langle \beta_3 \beta_4 \beta_5 \rangle - \langle \beta_3 \beta_4 \beta_5 \rangle \otimes \langle \beta_6 \beta_1 \beta_2 \rangle, \\ \langle \beta \rangle_s &= \langle \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \rangle \otimes \langle \beta_5 \beta_6 \rangle - \langle \beta_5 \beta_6 \rangle \otimes \langle \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \rangle, \\ \langle \beta \rangle_t &= \langle \beta_4 \beta_5 \beta_6 \beta_1 \rangle \otimes \langle \beta_2 \beta_3 \rangle - \langle \beta_2 \beta_3 \rangle \otimes \langle \beta_4 \beta_5 \beta_6 \beta_1 \rangle. \end{aligned}$$



Como $\alpha \sim \beta$ tenemos que $\alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 \sim \beta_3 \beta_4 \beta_5$. Por otro lado tenemos que $\alpha_1 \sim \beta_6 \beta_1 \beta_2$. Entonces es $\langle \alpha \rangle_r = \langle \beta \rangle_r$.



Luego es $\langle \alpha \rangle_p = \langle \beta \rangle_t$. De igual forma $\langle \alpha \rangle_q = \langle \beta \rangle_s$.

LEMA 2.1. Para todo par de curvas α, β en $\mathbb{Z}\widehat{\pi}$ tenemos que

$$[\langle \alpha \rangle_0, \langle \beta \rangle_0] = [\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle] = \sum_{q \in \alpha \# \beta} \varepsilon(q; \alpha, \beta) \langle \alpha_q \beta_q \rangle_0$$

DEMOSTRACIÓN. Probemos la primera igualdad. Si α y β son curvas no contractibles entonces es $\langle \alpha \rangle = \langle \alpha \rangle_0$ y $\langle \beta \rangle = \langle \beta \rangle_0$. Luego $[\langle \alpha \rangle_0, \langle \beta \rangle_0] = [\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle]$. Si α o β son contractibles tenemos que $[\langle \alpha \rangle_0, \langle \beta \rangle_0] = 0$.

Por otro lado supongamos que α es contractible a un punto entonces $\alpha \# \beta = \emptyset$. Luego es $[\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle] = 0$, entonces $[\langle \alpha \rangle_0, \langle \beta \rangle_0] = [\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle]$.

El segundo igual fue demostrado en el teorema 1.2.



TEOREMA 2.2. El mapa $\nu : \mathbb{Z}\widehat{\pi} \rightarrow \mathbb{Z}\widehat{\pi} \otimes \mathbb{Z}\widehat{\pi}$ definido anteriormente es un cocorchete de Lie, además $(\mathbb{Z}\widehat{\pi}, [,], \nu)$ es una biálgebra de Lie.

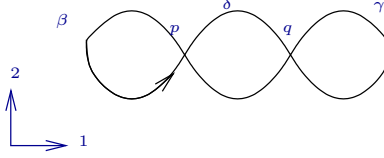
DEMOSTRACIÓN. i) Condición de antisimetría: $s \circ \nu = -\nu$.

$$\begin{aligned} s \circ \nu(\langle \alpha \rangle) &= \sum_{p \in \# \alpha} \langle \alpha_p^2 \rangle \otimes \langle \alpha_p^1 \rangle - \langle \alpha_p^1 \rangle \otimes \langle \alpha_p^2 \rangle \\ &= - \sum_{p \in \# \alpha} \langle \alpha_p^1 \rangle \otimes \langle \alpha_p^2 \rangle - \langle \alpha_p^2 \rangle \otimes \langle \alpha_p^1 \rangle \\ &= -\nu(\langle \alpha \rangle). \end{aligned}$$

ii) *Condición de co-Jacobi:* $(id + \varepsilon + \varepsilon^2)(id \otimes \nu)\nu = 0$.

$$\begin{aligned} ((id \otimes \nu) \circ \nu)(\langle \alpha \rangle) &= \sum_{p \in \# \alpha} (\langle \alpha_p^1 \rangle \otimes \nu(\langle \alpha_p^2 \rangle) - \langle \alpha_p^2 \rangle \otimes \nu(\langle \alpha_p^1 \rangle)) \\ &= \sum_{p \in \# \alpha} \sum_{q \in \# \alpha_p^2} \langle \alpha_p^1 \rangle \otimes \langle \alpha_{pq}^{21} \rangle \otimes \langle \alpha_{pq}^{22} \rangle \\ &\quad - \sum_{p \in \# \alpha} \sum_{q \in \# \alpha_p^1} \langle \alpha_p^2 \rangle \otimes \langle \alpha_{pq}^{11} \rangle \otimes \langle \alpha_{pq}^{12} \rangle. \end{aligned}$$

Sean $p \in \# \alpha$ y $q \in \# \alpha_p^1$ o $q \in \# \alpha_p^2$, es claro que $\{p, q\} \in \# \alpha$, entonces podemos descomponer la curva α en tres curvas cerradas β , γ y δ , donde β comienza y termina en p , γ comienza y termina en q y δ es la que pasa por p y q .



Entonces si $q \in \alpha_p^1$ se cumple que $p \in \alpha_q^1$. De igual forma si $q \in \alpha_p^2$ tenemos que $p \in \alpha_q^2$. Supongamos que $q \in \alpha_p^2$ entonces si calculamos $(id \otimes \nu_q)\nu_p(\langle \alpha \rangle)$ e $(id \otimes \nu_p)\nu_q(\langle \alpha \rangle)$, donde $\nu_p(\langle \alpha \rangle)$ es el sumando correspondiente al punto p de $\nu(\langle \alpha \rangle)$, obtenemos

$$\begin{aligned} (id \otimes \nu_q)\nu_p(\langle \alpha \rangle) &= \langle \beta \rangle_0 \otimes \langle \gamma \rangle_0 \otimes \langle \delta \rangle_0 - \langle \beta \rangle_0 \otimes \langle \delta \rangle_0 \otimes \langle \gamma \rangle_0 \\ (id \otimes \nu_p)\nu_q(\langle \alpha \rangle) &= \langle \gamma \rangle_0 \otimes \langle \beta \rangle_0 \otimes \langle \delta \rangle_0 - \langle \gamma \rangle_0 \otimes \langle \delta \rangle_0 \otimes \langle \beta \rangle_0. \end{aligned}$$

Luego, cuando aplicamos $(id + \varepsilon + \varepsilon^2)[(id \otimes \nu_q)\nu_p(\langle \alpha \rangle) + (id \otimes \nu_p)\nu_q(\langle \alpha \rangle)] = 0$.

iii) *Compatibilidad:* Sean α y β en posición genérica. Notemos: $a = \langle \alpha \rangle$ y $b = \langle \beta \rangle$.

La condición de compatibilidad dice que $\nu([a, b]) = a \cdot \nu(b) - b \cdot \nu(a)$, donde $\alpha \cdot (\beta \otimes \gamma) = [\alpha, \beta] \otimes \gamma + \beta \otimes [\alpha, \gamma]$.

Primero veamos que podemos escribir $\nu([a, b]) = \sigma - s \circ \sigma$.

$$\begin{aligned} \nu([a, b]) &= \sum_{p \in \alpha \# \beta} \varepsilon(p; \alpha, \beta) \nu(\langle \alpha_p \beta_p \rangle) \\ &= \sum_{p \in \alpha \# \beta} \sum_{q \in \# \alpha_p \beta_p} \varepsilon(p; \alpha, \beta) \left[\langle (\alpha_p \beta_p)_q^1 \rangle_0 \otimes \langle (\alpha_p \beta_p)_q^2 \rangle_0 - \langle (\alpha_p \beta_p)_q^2 \rangle_0 \otimes \langle (\alpha_p \beta_p)_q^1 \rangle_0 \right]. \end{aligned}$$

Si definimos $\sigma := \sum_{p \in \alpha \# \beta} \sum_{q \in \# \alpha_p \beta_p} \varepsilon(p; \alpha, \beta) \langle (\alpha_p \beta_p)_q^1 \rangle_0 \otimes \langle (\alpha_p \beta_p)_q^2 \rangle_0$, tenemos que $\nu([a, b]) = \sigma - s \circ \sigma$.

Ahora veamos como podemos reescribir a σ .

Como $q \in \# \alpha_p \beta_p$, tenemos que q pertenece a uno y solo uno de los siguientes conjuntos $\# \alpha$, $\# \beta$ o $\alpha \# \beta - \{p\}$.

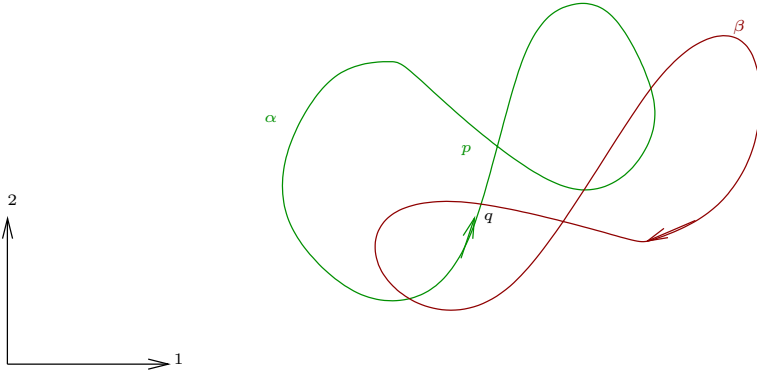
Si $q \in \# \alpha$, dado que $p \in \alpha \# \beta$ tenemos que $p \in \alpha_q^1 \# \beta$ o $p \in \alpha_q^2 \# \beta$, de igual forma si $q \in \# \beta$ tenemos que $p \in \alpha \# \varepsilon_q^1$ o $p \in \alpha \# \beta_q^2$. Entonces podemos descomponer a σ como

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5.$$

Donde

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \sum_{\{q \in \# \alpha \mid p \in \alpha_q^1 \# \beta\}} \varepsilon(p; \alpha, \beta) \langle (\alpha_p \beta_p)_q^1 \rangle_0 \otimes \langle (\alpha_p \beta_p)_q^2 \rangle_0 \\
 &= \sum_{\{q \in \# \alpha \mid p \in \alpha_q^1 \# \beta\}} \varepsilon(p; \alpha, \beta) \langle (\alpha_q^1)_p \beta_p \rangle_0 \otimes \langle \alpha_q^2 \rangle_0 \quad [\text{porque } q \in \# \alpha, p \in \alpha_q^1 \# \beta]. \\
 \sigma_2 &= \sum_{\{q \in \# \alpha \mid p \in \alpha_q^2 \# \beta\}} \varepsilon(p; \alpha, \beta) \langle (\alpha_p \beta_p)_q^1 \rangle_0 \otimes \langle (\alpha_p \beta_p)_q^2 \rangle_0 \\
 &= \sum_{\{q \in \# \alpha \mid p \in \alpha_q^2 \# \beta\}} \varepsilon(p; \alpha, \beta) \langle \alpha_q^1 \rangle_0 \otimes \langle (\alpha_q^2)_p \beta_p \rangle_0 \quad [\text{porque } q \in \# \alpha, p \in \alpha_q^2 \# \beta]. \\
 \sigma_3 &= \sum_{\{q \in \# \beta \mid p \in \alpha \# \beta_q^1\}} \varepsilon(p; \alpha, \beta) \langle (\alpha_p \beta_p)_q^1 \rangle_0 \otimes \langle (\alpha_p \beta_p)_q^2 \rangle_0 \\
 &= \sum_{\{q \in \# \beta \mid p \in \alpha \# \beta_q^1\}} \varepsilon(p; \alpha, \beta) \langle \alpha_p (\beta_q^1)_p \rangle_0 \otimes \langle \beta_q^2 \rangle_0 \quad [\text{porque } q \in \# \beta, p \in \alpha \# \beta_q^1]. \\
 \\
 \sigma_4 &= \sum_{\{q \in \# \beta \mid p \in \alpha \# \beta_q^2\}} \varepsilon(p; \alpha, \beta) \langle (\alpha_p \beta_p)_q^1 \rangle_0 \otimes \langle (\alpha_p \beta_p)_q^2 \rangle_0 \\
 &= \sum_{\{q \in \# \beta \mid p \in \alpha \# \beta_q^2\}} \varepsilon(p; \alpha, \beta) \langle \beta_q^1 \rangle_0 \otimes \langle \alpha_p (\beta_q^2)_p \rangle_0 \quad [\text{porque } q \in \# \beta, p \in \alpha \# \beta_q^2]. \\
 \sigma_5 &= \sum_{\{p, q \in \alpha \# \beta, p \neq q\}} \varepsilon(p; \alpha, \beta) \langle (\alpha_p \beta_p)_q^1 \rangle_0 \otimes \langle (\alpha_p \beta_p)_q^2 \rangle_0 \\
 &= \sum_{\{p, q \in \alpha \# \beta, p \neq q\}} \varepsilon(p; \alpha, \beta) \varepsilon(q; \alpha, \beta) \langle (\alpha \beta)_q^p \rangle_0 \otimes \langle (\beta \alpha)_p^q \rangle_0.
 \end{aligned}$$

Donde $(\alpha \beta)_q^p$ es la curva que recorre α desde q hasta p luego recorre β hasta llegar nuevamente a p .



Observar que $(\alpha\beta)_q^p = (\beta\alpha)_p^q$. Entonces $s \circ \sigma_5 = \sigma_5$.

Calculemos ahora $a \cdot \nu(b)$ y $b \cdot \nu(a)$

$$\begin{aligned}
a \cdot \nu(b) &= a \cdot \left\{ \sum_{q \in \#\beta} \langle \beta_q^1 \rangle_0 \otimes \langle \beta_q^2 \rangle_0 - \langle \beta_q^2 \rangle_0 \otimes \langle \beta_q^1 \rangle_0 \right\} \\
&= \sum_{q \in \#\beta} \left[a, \langle \beta_q^1 \rangle_0 \right] \otimes \langle \beta_q^2 \rangle_0 + \langle \beta_q^1 \rangle_0 \otimes \left[a, \langle \beta_q^2 \rangle_0 \right] \\
&\quad - s \left(\sum_{q \in \#\beta} \left[a, \langle \beta_q^1 \rangle_0 \right] \otimes \langle \beta_q^2 \rangle_0 + \langle \beta_q^1 \rangle_0 \otimes \left[a, \langle \beta_q^2 \rangle_0 \right] \right) \\
&= \sum_{\{q \in \#\beta \mid p \in \alpha \#\beta_q^1\}} \varepsilon(p; \alpha, \beta) \langle \alpha_p(\beta_q^1)_p \rangle_0 \otimes \langle \beta_q^2 \rangle_0 \\
&\quad + \sum_{\{q \in \#\beta \mid p \in \alpha \#\beta_q^2\}} \varepsilon(p; \alpha, \beta) \langle \beta_q^1 \rangle_0 \otimes \langle \alpha_p(\beta_q^2)_p \rangle_0 \\
&\quad - s \left(\sum_{\{q \in \#\beta \mid p \in \alpha \#\beta_q^1\}} \varepsilon(p; \alpha, \beta) \langle \alpha_p(\beta_q^1)_p \rangle_0 \otimes \langle \beta_q^2 \rangle_0 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\{q \in \#\beta \mid p \in \alpha \#\beta_q^2\}} \varepsilon(p; \alpha, \beta) \langle \beta_q^1 \rangle_0 \otimes \langle \alpha_p(\beta_q^2)_p \rangle_0 \right) \\
&= \sigma_3 + \sigma_4 - s(\sigma_3 + \sigma_4).
\end{aligned}$$

De igual forma se prueba que $-b \cdot \nu(a) = \sigma_1 + \sigma_2 - s(\sigma_1 + \sigma_2)$.

Entonces tenemos que

$$\nu([a, b]) = a \cdot \nu(b) - b \cdot \nu(a).$$

◻

TEOREMA 2.3. $(\mathbb{Z}\hat{\pi}, [,], \nu)$ es una biálgebra de Lie involutiva.

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el teorema 2.2 concluimos que $(\mathbb{Z}\hat{\pi}, [,], \nu)$ es una biálgebra de Lie, falta probar que es involutiva, es decir $[,] \circ \nu = 0$.

Sea α un lazo y consideremos su clase $\langle \alpha \rangle$ en $\mathbb{Z}\hat{\pi}$, entonces

$$\nu(\langle \alpha \rangle) = \sum_{p \in \#\alpha} \langle \alpha_p^1 \rangle_0 \otimes \langle \alpha_p^2 \rangle_0 - \langle \alpha_p^2 \rangle_0 \otimes \langle \alpha_p^1 \rangle_0.$$

Luego $([,] \circ \nu)(\langle \alpha \rangle) = \sum_{p \in \#\alpha} \left\{ \left[\langle \alpha_p^1 \rangle_0, \langle \alpha_p^2 \rangle_0 \right] - \left[\langle \alpha_p^2 \rangle_0, \langle \alpha_p^1 \rangle_0 \right] \right\}$.

Además $\left[\langle \alpha_p^1 \rangle_0, \langle \alpha_p^2 \rangle_0 \right] = \sum_{q \in \alpha_p^1 \#\alpha_p^2} \varepsilon(q; \alpha_p^1, \alpha_p^2) \langle \alpha_{pq}^1 \alpha_{pq}^2 \rangle$.

Por lo tanto tenemos que

$$([,] \circ \nu)(\langle \alpha \rangle) = 2 \sum_{p \in \#\alpha} \sum_{q \in \alpha_p^1 \#\alpha_p^2} \varepsilon(q; \alpha_p^1, \alpha_p^2) \langle \alpha_{pq}^1 \alpha_{pq}^2 \rangle.$$

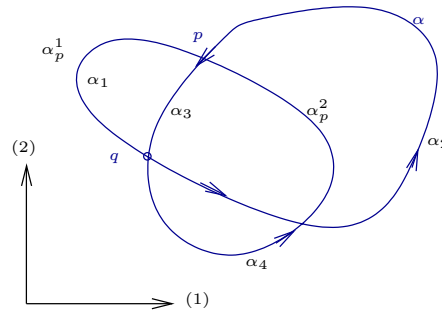
Si no existe $p \in \#\alpha$ entonces es por definición $\nu(\alpha) = 0$. Luego es $([\ ,] \circ \nu)(\langle \alpha \rangle) = 0$.

Sea $p \in \#\alpha$, notamos por $\langle \alpha \rangle_p$ al sumando de $\nu(\langle \alpha \rangle)$ dado por $\langle \alpha_p^1 \rangle_0 \otimes \langle \alpha_p^2 \rangle_0 - \langle \alpha_p^2 \rangle_0 \otimes \langle \alpha_p^1 \rangle_0$ y notamos por $\langle \alpha \rangle_{pq}$ al sumando $\varepsilon(q; \alpha_p^1, \alpha_p^2) \langle \alpha_{pq}^1 \alpha_{pq}^2 \rangle$ de $([\ ,] \circ \nu)(\langle \alpha \rangle)$. Entonces tenemos que

$$([\ ,] \circ \nu)(\langle \alpha \rangle) = 2 \sum_{p \in \#\alpha} \sum_{q \in \alpha_p^1 \# \alpha_p^2} \langle \alpha \rangle_{pq}.$$

Primero si no existe $q \in \alpha_p^1 \# \alpha_p^2$ entonces es por definición $([\ ,])(\langle \alpha \rangle_p) = 0$.

Sea $q \in \alpha_p^1 \# \alpha_p^2$. Como p y q son puntos de autointersección de α podemos descomponerla en cuatro curvas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y α_4 . Veamos como construirlas.



Sean α_p^1 y α_p^2 las curvas que se obtienen al aplicar el corchete en p a α . Definimos la curva α_1 como la que comienza en p y recorre a α_p^1 hasta llegar a q (respetando la orientación de α) y α_2 como la curva que recorre α_p^1 desde q hasta p . De forma análoga definimos α_3 como la curva que recorre α_p^2 desde p hasta q y α_4 la que recorre α_p^2 desde q hasta p . Es claro que $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$. Calculemos ahora $([\ ,]_q \circ \nu_p)(\langle \alpha \rangle)$ y $([\ ,]_p \circ \nu_q)(\langle \alpha \rangle)$.

Por definición tenemos que

$$\begin{aligned} \nu_p(\langle \alpha \rangle) &= \langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle \otimes \langle \alpha_3 \alpha_4 \rangle - \langle \alpha_3 \alpha_4 \rangle \otimes \langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle, \\ ([\ ,]_q(\nu_p))(\langle \alpha \rangle) &= 2sg(q; \alpha_1 \alpha_2, \alpha_3 \alpha_4) \langle \alpha_2 \alpha_1 \alpha_4 \alpha_3 \rangle \\ &= 2sg(q; \alpha_2, \alpha_4) \langle \alpha_2 \alpha_1 \alpha_4 \alpha_3 \rangle. \end{aligned}$$

Por definición del corchete en p tenemos que $1 = sg(p; \alpha_p^1, \alpha_p^2) = sg(p; \alpha_1, \alpha_3)$.

Calculemos ahora $([\ ,]_p(\nu_q))(\langle \alpha \rangle)$.

(1) Si $sg(q; \alpha_2, \alpha_4) = 1$ entonces

$$\begin{aligned} \nu_q(\langle \alpha \rangle) &= \langle \alpha_2 \alpha_3 \rangle \otimes \langle \alpha_4 \alpha_1 \rangle - \langle \alpha_4 \alpha_1 \rangle \otimes \langle \alpha_2 \alpha_3 \rangle, \\ ([\ ,]_p(\nu_q))(\langle \alpha \rangle) &= 2sg(p; \alpha_3, \alpha_1) \langle \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_4 \rangle \\ &= -2 \langle \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_4 \rangle \quad [\text{porque } sg(p; \alpha_1, \alpha_3) = 1]. \end{aligned}$$

(2) Si $sg(q; \alpha_2, \alpha_4) = -1$ entonces

$$\begin{aligned} \nu_q(\langle \alpha \rangle) &= \langle \alpha_4 \alpha_1 \rangle \otimes \langle \alpha_2 \alpha_3 \rangle - \langle \alpha_2 \alpha_3 \rangle \otimes \langle \alpha_4 \alpha_1 \rangle, \\ [\cdot, \cdot]_p(\nu_q)(\langle \alpha \rangle) &= 2sg(p; \alpha_1, \alpha_3) \langle \alpha_1 \alpha_4 \alpha_3 \alpha_2 \rangle \\ &= 2 \langle \alpha_1 \alpha_4 \alpha_3 \alpha_2 \rangle \quad [\text{porque } sg(p; \alpha_1, \alpha_3) = 1]. \end{aligned}$$

Luego tenemos que $[\cdot, \cdot]_q(\nu_p)(\langle \alpha \rangle) = -[\cdot, \cdot]_p(\nu_q)(\langle \alpha \rangle)$. Por lo tanto es $([\cdot, \cdot] \circ \nu)(\langle \alpha \rangle) = 0$.



CAPÍTULO 3

Espacio de las palabras cíclicas

Este capítulo se divide en tres secciones. En la primera sección definiremos el *espacio de las palabras cíclicas* \mathbb{V} y en las dos siguientes secciones definiremos los mapas *cocorchete de Lie* $\delta : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ y *corchete de Lie* $[\cdot, \cdot] : \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$. Estas estructuras fueron definidas en [1].

1. Palabras cíclicas y pares ligados

DEFINICIÓN 1.1. Para cada entero no negativo, un n -alfabeto o simplemente *alfabeto* es un conjunto de símbolos $\mathbb{A}_n = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Consideremos F el grupo libre generado por el conjunto \mathbb{A}_n , como se define en el apéndice A.

DEFINICIÓN 1.2. En F definimos una relación de equivalencia dada por: si $V, W \in F$ decimos que V y W son *conjugadas* y notamos $V \sim W$ si existe $U \in F$ tal que $W = UV\bar{U}$. Definimos el *espacio de las palabras cíclicas* \mathcal{F} como $\mathcal{F} := F / \sim$.

NOTACIÓN: Si W es un *representante* (también llamado *representante lineal*) de $\mathcal{W} \in \mathcal{F}$, notamos su clase como $c(W) = \mathcal{W}$.

DEFINICIÓN 1.3. Sea $\mathcal{W} \in \mathcal{F}$, decimos que \mathcal{W} es *cíclicamente reducida* si cualquier representante lineal de \mathcal{W} es una palabra reducida (esta definición se encuentra en el apéndice A).

DEFINICIÓN 1.4. Si \mathcal{W} es una palabra cíclica, W un representante lineal de \mathcal{W} y n es un entero positivo, definimos $\mathcal{W}^n = c(W^n)$, $\overline{\mathcal{W}} = c(\overline{W})$ y $\mathcal{W}^{-n} = \overline{\mathcal{W}}^n$. Una palabra cíclica reducida es *primitiva* si no se puede escribir como \mathcal{W}^r para algún $r \geq 2$ y alguna palabra cíclica reducida \mathcal{W} .

DEFINICIÓN 1.5. El *largo* de una palabra lineal W o cíclica \mathcal{W} , es el número de letras contadas con multiplicidad que en ella aparecen y se denota por $l(W)$, respectivamente $l(\mathcal{W})$.

Sea \mathcal{O} una palabra cíclica reducida tal que toda letra de $\mathbb{A}_n \cup \overline{\mathbb{A}_n}$ aparece una sola vez. A esta palabra se la llama *símbolo de superficie*.

DEFINICIÓN 1.6. Dado un símbolo de superficie \mathcal{O} , a cada palabra cíclica \mathcal{W} con $l(\mathcal{W}) \geq 3$ le podemos asociar un número $o(\mathcal{W}) \in \{-1, 0, 1\}$.

- i) Si \mathcal{W} es reducida y existe un mapa inyectivo de \mathcal{W} en \mathcal{O} que preserva la orientación de las letras de \mathcal{W} en \mathcal{O} , entonces $o(\mathcal{W}) = 1$.
- ii) Si \mathcal{W} es reducida y existe un mapa inyectivo de \mathcal{W} en \mathcal{O} que revierte la orientación de las letras de \mathcal{W} en \mathcal{O} , entonces $o(\mathcal{W}) = -1$.
- iii) En otro caso, $o(\mathcal{W}) = 0$.

DEFINICIÓN 1.7. Sea \mathcal{O} un símbolo de superficie dado y sean P y Q dos palabras lineales. El par ordenado (P, Q) es un par \mathcal{O} -ligado si P y Q son palabras reducidas de longitud por lo menos dos y se cumple una de las siguientes condiciones:

- (1) $P = p_1p_2$, $Q = q_1q_2$ y $o(c(\bar{p}_1\bar{q}_1p_2q_2)) \neq 0$.
- (2) $P = p_1Yp_2$, $Q = q_1Yq_2$ con $p_1 \neq q_1$ y $p_2 \neq q_2$ donde Y es una palabra lineal de longitud por lo menos uno. Si $Y = x_1Xx_2$ se verifica $o(c(\bar{p}_1\bar{q}_1x_1)) = o(c(p_2q_2\bar{x}_2))$. Si $Y = x_1$ se verifica $o(c(\bar{p}_1\bar{p}_2x_1)) = o(c(p_2q_2\bar{x}_1))$.
- (3) $P = p_1Yp_2$, $Q = q_1\bar{Y}q_2$ con $p_1 \neq \bar{q}_2$ y $p_2 \neq \bar{q}_1$ donde Y es una palabra lineal de longitud por lo menos uno. Si $Y = x_1Xx_2$ se verifica $o(c(q_2\bar{p}_1x_1)) = o(c(\bar{q}_1p_2\bar{x}_2))$. Si $Y = x_1$ se verifica $o(c(q_2\bar{p}_1x_1)) = o(c(\bar{q}_1p_2\bar{x}_1))$.

DEFINICIÓN 1.8. Sea \mathcal{W} una palabra cíclica reducida. Diremos que P es una *ocurrencia* de una subpalabra lineal de \mathcal{W} , si dado W una representante lineal de \mathcal{W} , P es una subpalabra lineal de W especificando su posición.

EJEMPLO 1.1. Consideremos el símbolo de superficie $\mathcal{O} = c(a_1a_2\bar{a}_1\bar{a}_2a_3a_4\bar{a}_3\bar{a}_4)$ y la palabra cíclica $\mathcal{W} = c(a_2\bar{a}_3a_1a_1a_3\bar{a}_2a_1a_1)$. Un representante lineal de \mathcal{W} es $W = a_2\bar{a}_3a_1a_1a_3\bar{a}_2a_1a_1$. La palabra $P = a_1a_1$ es una subpalabra de W , pero hay dos ocurrencias diferentes de dicha palabra. La ocurrencia P que esta formada por la tercera y la cuarta letra de W y la ocurrencia P que esta formada por la septima y la octava letra de W .

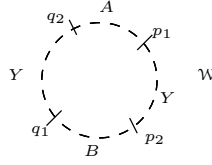
Si \mathcal{W} es una palabra cíclica reducida, denotamos por $\mathbb{LP}_1(\mathcal{W})$ al conjunto de los pares ligados (P, Q) donde P y Q son ocurrencias de subpalabras lineales de un representante lineal de \mathcal{W} .

2. Cocorchete de Lie

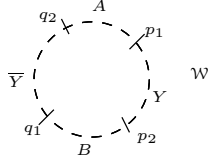
Sea \mathbb{V} el espacio vectorial generado por \mathcal{F} . Donde $\mathcal{F} = F/\sim$, siendo F el grupo libre generado por \mathbb{A}_n y \mathcal{O} un símbolo de superficie dado.

DEFINICIÓN 2.1. A cada par ligado $(P, Q) \in \mathbb{LP}_1(\mathcal{W})$ le asociamos dos palabras cíclicas, $\delta_1(P, Q) = c(W_1)$ y $\delta_2(P, Q) = c(W_2)$.

- i) Si (P, Q) cumple (1) o (2) de la definición de par ligado, hacemos dos cortes en la palabra \mathcal{W} , uno antes de p_2 y otro antes de q_2 , entonces definimos W_1 y W_2 como sigue
 - (1) $W_1 = p_2Bq_1$, $W_2 = q_2Ap_1$
 - (2) $W_1 = p_2Bq_1Y$, $W_2 = q_2Ap_1Y$



- ii) Si (P, Q) cumple (3) de la definición de par ligado, definimos W_1 y W_2 como $W_1 = p_2 B q_1$ y $W_2 = q_2 A p_1$.



LEMA 2.1. *Sea \mathcal{W} una palabra cíclica reducida. Para cada $(P, Q) \in \mathbb{L}\mathbb{P}_1(\mathcal{W})$, las palabras lineales W_1 y W_2 de la definición 2.1 son disjuntas en \mathcal{W} . Más aun W_1 y W_2 son no vacías y en el caso i) $\mathcal{W} = c(W_1 W_2)$ o en el caso ii) $\mathcal{W} = c(Y W_1 \bar{Y} W_2)$.*

DEMOSTRACIÓN. En el caso (1): $W_1 W_2 = p_2 B q_1 q_2 A p_1$.

Entonces $c(W_1 W_2) = c(p_2 B q_1 q_2 A p_1) = c(p_1 p_2 B q_1 q_2 A) = \mathcal{W}$.

En el caso (2): $W_1 W_2 = p_2 B q_1 Y q_2 A p_1 Y$. Entonces $c(W_1 W_2) = c(p_2 B q_1 Y q_2 A p_1 Y) = c(p_1 Y p_2 B q_1 Y q_2 A) = c(A p_1 Y p_2 B q_1 Y q_2) = \mathcal{W}$.

En el caso (3) hay que ver que Y e \bar{Y} no se superponen. Supongamos que existen un par de palabras lineales Y_1 e Y_2 tales que $Y = Y_1 Y_2$ y que \bar{Y} comienza en Y_2 .

Por definición $\bar{Y} = \bar{Y}_2 \bar{Y}_1$. Entonces $Y_2 = \bar{Y}_2$. Luego Y_2 es reducible y esto contradice que \mathcal{W} es reducida. Entonces Y e \bar{Y} no se superponen.

Veamos ahora que W_1 y W_2 son no vacías.

Si una de las palabras es vacía, por ejemplo W_1 , como Y es no vacía $\mathcal{W} = c(Y \bar{Y} W_2)$ no es reducida y esto contradice la hipótesis. Luego W_1 y W_2 son no vacías.



PROPOSICIÓN 2.2. *Sea \mathcal{W} una palabra cíclica reducida y sea $(P, Q) \in \mathbb{L}\mathbb{P}_1(\mathcal{W})$. Entonces $\delta_1(P, Q)$ y $\delta_2(P, Q)$ son palabras cíclicas reducidas. Además $\delta_1(P, Q)$ y $\delta_2(P, Q)$ son no vacías.*

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el Lema 2.1 tenemos que las palabras lineales W_1 y W_2 son no vacías, entonces para probar que $c(W_1)$ y $c(W_2)$ son no vacías basta probar que son palabras reducidas.

- (i) Si (P, Q) satisface (1) tenemos que $o(c(\bar{p}_1 \bar{q}_1 p_2 q_2)) \neq 0$, entonces existe un mapa inyectivo de $c(\bar{p}_1 \bar{q}_1 p_2 q_2)$ en \mathcal{O} que preserva la orientación de las letras de $c(\bar{p}_1 \bar{q}_1 p_2 q_2)$ en \mathcal{O} . En particular no se repiten las letras. Luego $\bar{p}_1 \neq q_2$ y $\bar{q}_1 \neq p_2$. Entonces $c(W_1)$ y $c(W_2)$ son reducidas.
- (ii) Si (P, Q) satisface (2) tenemos que $\delta_1(P, Q)$ y $\delta_2(P, Q)$ son no reducidas si y sólo si $p_2 = \bar{x}_2$ y $q_2 = \bar{x}_2$ respectivamente. Como \mathcal{W} es reducida esto no pasa, entonces $\delta_1(P, Q)$ y $\delta_2(P, Q)$ son reducidas.

(iii) Si (P, Q) satisface (3) tenemos que $\delta_1(P, Q)$ es no reducida si y sólo si $\bar{p}_2 = q_1$ y $\delta_2(P, Q)$ es no reducida si y sólo si $\bar{q}_2 = p_1$.

Como (P, Q) satisface la condición tres de par ligado se cumple que $p_2 \neq \bar{q}_1$ y $p_1 \neq \bar{q}_2$, entonces $\delta_1(P, Q)$ y $\delta_2(P, Q)$ son reducidas.



DEFINICIÓN 2.2. Sea $(P, Q) \in \mathbb{LP}_1(\mathcal{W})$. Definimos el *signo* de (P, Q) como:

- (i) Si (P, Q) verifica la condición (1) de par ligado, entonces $sg(P, Q) = o(c(\bar{p}_1\bar{q}_1p_2q_2))$.
- (ii) Si (P, Q) verifica la condición (2) de par ligado, entonces $sg(P, Q) = o(c(\bar{p}_1\bar{q}_1x_1))$.
- (iii) Si (P, Q) verifica la condición (3) de par ligado, entonces $sg(P, Q) = o(c(q_2\bar{p}_1x_1))$.

LEMA 2.3. a) Para todo par ligado (P, Q) , $sg(P, Q) \in \{-1, 1\}$.

b) Si (P, Q) es un par ligado entonces (Q, P) es un par ligado y $sg(Q, P) = -sg(P, Q)$.

DEMOSTRACIÓN. a) (1) Si (P, Q) satisface (1) tenemos que $o(c(\bar{p}_1\bar{q}_1p_2q_2)) \neq 0$, entonces $sg(P, Q) \in \{-1, 1\}$.

(2) Si (P, Q) satisface (2) tenemos que $o(c(\bar{p}_1\bar{q}_1x_1)) = o(c(p_2q_2\bar{x}_2))$, con $p_1 \neq q_1 \neq \bar{x}_1 \neq \bar{p}_1$. Son palabras de tres letras diferentes, entonces existe un mapa inyectivo que preserva o revierte la orientación de ellas en \mathcal{O} . Luego $sg(P, Q) \in \{-1, 1\}$.

(3) Si (P, Q) satisface (3) tenemos que $o(c(q_2\bar{p}_1x_1)) = o(c(\bar{q}_1p_2\bar{x}_2))$ con $p_1 \neq \bar{q}_2 \neq \bar{x}_1 \neq \bar{p}_1$. Son palabras de tres letras diferentes, entonces igual que en el caso anterior existe un mapa inyectivo que preserva o revierte la orientación de ellas en \mathcal{O} . Luego $sg(P, Q) \in \{-1, 1\}$.

b) (1) Si (P, Q) satisface (1) tenemos que $P = p_1p_2$ y $Q = q_1q_2$ donde $o(c(\bar{p}_1\bar{q}_1p_2q_2)) \neq 0$. Luego $o(c(\bar{q}_1\bar{p}_1q_2p_2)) = o(c(q_2p_2\bar{q}_1\bar{p}_1)) = -o(c(\bar{p}_1\bar{q}_1p_2q_2)) \neq 0$. Entonces $o(c(\bar{q}_1\bar{p}_1q_2p_2)) \neq 0$. Por lo tanto (Q, P) es un par ligado y $sg(Q, P) = -sg(P, Q)$.

(2) Si (P, Q) satisface (2) tenemos que $P = p_1Yp_2$ y $Q = q_1Yq_2$ donde podemos escribir $Y = x_1Xx_2$ y $o(c(\bar{p}_1\bar{q}_1x_1)) = o(c(p_2q_2\bar{x}_2))$. Por lo tanto $o(c(\bar{q}_1\bar{p}_1x_1)) = -o(c(\bar{p}_1\bar{q}_1x_1)) = -o(c(p_2q_2\bar{x}_2)) = o(c(q_2p_2\bar{x}_2))$. Entonces $o(c(\bar{q}_1\bar{p}_1x_1)) = o(c(q_2p_2\bar{x}_2))$. Luego (Q, P) es un par ligado y $sg(Q, P) = -sg(P, Q)$.

(3) Si (P, Q) satisface (3) tenemos que $P = p_1Yp_2$ y $Q = q_1\bar{Y}q_2$ donde podemos escribir $Y = x_1Xx_2$ y $o(c(q_2\bar{p}_1x_1)) = o(c(\bar{q}_1p_2\bar{x}_2))$. Entonces $o(c(p_2\bar{q}_1\bar{x}_2)) = -o(c(\bar{x}_2\bar{q}_1p_2)) = -o(c(\bar{q}_1p_2\bar{x}_2)) = -o(c(q_2\bar{p}_1x_1)) = o(c(x_1\bar{p}_1q_2)) = o(c(\bar{p}_1q_2x_1))$. Luego (Q, P) es un par ligado y $sg(Q, P) = -sg(P, Q)$.



DEFINICIÓN 2.3. Definimos el mapa lineal $\delta : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ de la siguiente manera:

$$\delta(\mathcal{W}) = \sum_{(P, Q) \in \mathbb{LP}_1(\mathcal{W})} sg(P, Q)\delta_1(P, Q) \otimes \delta_2(P, Q).$$

Es claro que el conjunto $\mathbb{LP}_1(\mathcal{W})$ es finito, entonces la suma anterior es finita.

3. Corchete de Lie

NOTACIÓN: Sea \mathcal{W} una palabra cíclica y P una subpalabra de algún representante lineal de \mathcal{W} , en esta situación notaremos $P \subset \mathcal{W}$.

DEFINICIÓN 3.1. Para cada par de palabras cíclicas reducidas \mathcal{V} y \mathcal{W} se define $\mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W}) := \{(P, Q) \text{ pares ligados} : \text{existen enteros positivos } j \text{ y } k \text{ tales que } P \subset \mathcal{V}^j, Q \subset \mathcal{W}^k\}$

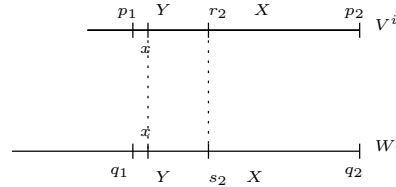
PROPOSICIÓN 3.1. Sean \mathcal{V} y \mathcal{W} palabras cíclicas reducidas. Consideremos $(P, Q), (R, S) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ diferentes. Entonces las palabras "medias" de estos pares son ocurrencias disjuntas.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $P = p_1 X p_2, Q = q_1 X q_2, R = r_1 Y r_2$ y $S = s_1 Y s_2$ pares ligados de tipo (2). El caso (3) es análogo.

Supongamos además que X e Y no son ocurrencias disjuntas. Sean V y W representaciones lineales de \mathcal{V} y \mathcal{W} respectivamente, donde V comienza en p_2 y W comienza en q_2 , sean i y j los menores enteros tales que $V = p_2 B p_1 X$ y $W = q_2 D q_1 X$. Consideremos $X = x X_1$ e $Y = y Y_1$, donde x e y son la misma ocurrencia en V y W .

Como P y R son subpalabras de V^k , donde $P = p_1 x X_1 p_2$ y $R = r_1 x Y_1 q_2$ donde x es la misma ocurrencia en V tenemos que $p_1 = r_1$, de igual forma tenemos que $s_1 = q_1$.

Supongamos $l(Y) < l(X)$, entonces podemos escribir $X = Y r_2 X_2$ y $X = Y s_2 X_2$, entonces es $r_2 = s_2$, esto contradice la definición de par ligado, entonces es $X = Y$ luego es $(P, Q) = (R, S)$. Los otros casos son análogos.



PROPOSICIÓN 3.2. Sean \mathcal{V} y \mathcal{W} palabras cíclicas reducidas, entonces

- $\mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ tiene a lo sumo $l(\mathcal{V})l(\mathcal{W})$ elementos.
- $\mathbb{LP}_1(\mathcal{W})$ tiene a lo sumo $l(\mathcal{W})(l(\mathcal{W}) - 1)$ elementos.

DEMOSTRACIÓN. a) Sean n_1, n_2 y n_3 la cantidad de pares ligados que satisfacen (1), (2) y (3) en la definición de pares ligados respectivamente. Definimos

$$\mathcal{C} := \{(x_1 x_2, z_1 z_2) : x_1 x_2 \text{ ocurr. de una subp. de } \mathcal{V} \text{ y } z_1 z_2 \text{ ocurr. de una subp. de } \mathcal{W}\}.$$

Lo primero que podemos observar es que $\#\mathcal{C} = l(\mathcal{V})l(\mathcal{W})$.

Definimos $\mathcal{C}_1 = \{(x_1 x_2, z_1 z_2) \in \mathcal{C} : x_1 \neq z_1, x_2 \neq z_2\}$

Si (P, Q) es un par ligado que verifica la condición (1) entonces $(P, Q) \in \mathcal{C}_1$

porque si (P, Q) verifica (1) tenemos que $P = p_1p_2$ y $Q = q_1q_2$ con $p_1 \neq q_1$ y $p_2 \neq q_2$. Luego $(P, Q) \in \mathcal{C}_1$. Entonces $n_1 \leq \#\mathcal{C}_1$.

Afirmación:

- i) Cada par ligado que verifica la condición (2) determina dos elementos diferentes en $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_1$.
- ii) Si tenemos k pares ligados diferentes que verifican la condición de (2), estos determinan $2k$ elementos diferentes en $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_1$.

Demostración de la Afirmación

- i) Sea (P, Q) un par ligado que verifica la condición (2), escribamos $P = p_1Xp_2$ y $Q = q_1Xq_2$, supongamos que $X = xX_1$.

Consideremos (P_1, Q_1) y (P_2, Q_2) dados por $P_1 = xx_1$, $P_2 = p_1x$, $Q_1 = xx_1$ y $Q_2 = q_1x$. Es claro que $(P_1, Q_1), (P_2, Q_2) \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_1$ y son diferentes porque $p_1 \neq q_1$.

- ii) Sean $(P, Q), (R, S)$ dos pares ligados diferentes, donde $P = p_1Xp_2$, $Q = q_1Xq_2$, $R = r_1Yr_2$ y $S = s_1Ys_2$. Veamos que determinan elementos diferentes. Por definición (P, Q) determina $\{(P_1, Q_1), (P_2, Q_2)\}$ y (R, S) determina $\{(R_1, S_1), (R_2, S_2)\}$ en $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_1$.

Si $(P_1, Q_1) = (R_1, S_1)$ tenemos que $xx_1 = yy_1$ es la misma ocurrencia en \mathcal{V} y \mathcal{W} . Entonces aplicando la proposición 3.1 es $(P, Q) = (R, S)$.

Si $(P_2, Q_2) = (R_2, S_2)$ tenemos que $p_1x = r_1y$ es la misma ocurrencia en \mathcal{V} y $q_1x = s_1y$ es la misma ocurrencia en \mathcal{W} . Luego por la proposición 3.1 es $(P, Q) = (R, S)$.

Si $(P_1, Q_1) = (R_2, S_2)$ tenemos que $xx_1 = r_1y$ es la misma ocurrencia en \mathcal{V} y $xx_1 = s_1y$ es la misma ocurrencia en \mathcal{W} . Entonces es $r_1y = s_1y$, luego tenemos que $r_1 = s_1$ y esto contradice el hecho que (R, S) es un par ligado. Entonces k pares ligados determinan $2k$ elementos en $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_1$.

Aplicando la afirmación, si tenemos n_2 elementos que verifican la condición (2) de par ligado, tenemos $2n_2$ elementos diferentes en $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_1$.

Luego $2n_2 \leq \#\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_1 = \#\mathcal{C} - \#\mathcal{C}_1 = l(\mathcal{V})l(\mathcal{W}) - \#\mathcal{C}_1 \leq l(\mathcal{V})l(\mathcal{W}) - n_1$.

Consideremos el conjunto $\mathcal{C}_2 = \{(x_1x_2, z_1z_2) \in \mathcal{C} : \overline{x_1} \neq z_2, \overline{x_2} \neq z_1\}$

Primero observar que los pares ligados (P, Q) que satisfacen la condición (1) están en \mathcal{C}_2 , porque $P = p_1p_2$, $Q = q_1q_2$ con $p_1 \neq q_1$, $p_2 \neq q_2$ y $o(c(\overline{p_1} \overline{q_1} p_2 q_2)) \neq 0$, entonces $\overline{q_1} \neq p_2$ y $q_2 \neq \overline{p_1}$. Luego $(P, Q) \in \mathcal{C}_2$. Entonces $n_1 \leq \#\mathcal{C}_2$.

Razonando de forma análoga al caso (2) de par ligado se puede probar que cada par ligado que verifica la condición (3) determina dos elementos diferentes en $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_2$. Luego $2n_3 \leq l(\mathcal{V})l(\mathcal{W}) - \#\mathcal{C}_2 \leq l(\mathcal{V})l(\mathcal{W}) - n_1$. Entonces $2n_2 + 2n_3 \leq l(\mathcal{V})l(\mathcal{W}) - n_1 + l(\mathcal{V})l(\mathcal{W}) - n_1$. Por lo tanto $n_1 + n_2 + n_3 \leq l(\mathcal{V})l(\mathcal{W})$.

Finalmente tenemos $\#\mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \leq l(\mathcal{V})l(\mathcal{W})$.

- b) Se prueba de igual forma que el caso a) tomando

$$\mathcal{C} := \{(x_1x_2, z_1z_2) : x_1x_2y z_1z_2 \text{ no son la misma ocurrencia en } \mathcal{W}\}.$$

Entonces $\sharp\mathcal{C} = l(\mathcal{W})(l(\mathcal{W}) - 1)$. Es inmediato probar que que todo par ligado (P, Q) que verifique la condición (1) pertenece a \mathcal{C} , entonces $n_1 \leq \sharp\mathcal{C}$. Razonando de forma análoga a a) se prueba que $\sharp\mathbb{LP}_1(\mathcal{W}) \leq l(\mathcal{W})(l(\mathcal{W}) - 1)$.



DEFINICIÓN 3.2. A cada par ligado $(P, Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ le asociamos una palabra cíclica $\gamma(P, Q) = c(V_1W_1)$ donde V_1 y W_1 son palabras lineales definidas por:

- i) Si (P, Q) es una par ligado tipo (1) o (2), V_1 es la representación lineal de \mathcal{V} obtenida al cortarla inmediatamente antes de p_2 y W_1 es la representación lineal de \mathcal{W} obtenida al cortarla inmediatamente antes de q_2 .
- ii) Si (P, Q) es un par ligado tipo (3), V_1 es la subpalabra lineal de \mathcal{V} que comienza después de la última letra de Y y termina antes de la primer letra de Y y W_1 es la subpalabra lineal de \mathcal{W} que comienza después de la última letra de \bar{Y} y termina antes de la primer letra de \bar{Y} .

PROPOSICIÓN 3.3. Para cada par de palabras cíclicas reducidas \mathcal{V}, \mathcal{W} y para cada par ligado $(P, Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, $\gamma(P, Q)$ es una palabra cíclica reducida, en particular es una palabra no vacía.

DEMOSTRACIÓN. Como $(P, Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, tenemos que existen enteros j y k tales que $P \subset \mathcal{V}^j$ y $Q \subset \mathcal{W}^k$.

- i) Si (P, Q) verifica la condición (1) de par ligado, tenemos que $P = p_1p_2$ y $Q = q_1q_2$ con $p_1 \neq q_1$, $p_2 \neq q_2$ y $o(c(\bar{p}_1\bar{q}_1p_2q_2)) \neq 0$. Luego $\bar{p}_1 \neq q_2$ y por lo tanto $p_1 \neq \bar{q}_2$. Entonces, aplicando además que \mathcal{V} y \mathcal{W} son reducidas, $\gamma(P, Q) = c(V_1W_1) = c(p_2Yp_1q_2Zq_1)$ es reducida, donde $V_1 = p_2Yp_1$ y $W_1 = q_2Zq_1$.
Si (P, Q) verifica la condición (2) de par ligado, tenemos que $P = p_1Yp_2$, $Q = q_1Yq_2$ con $p_1 \neq q_1$, $p_2 \neq q_2$ y $o(c(\bar{p}_1\bar{q}_1x_1)) = o(c(p_2q_2\bar{x}_2))$, donde $Y = x_1Xx_2$. Sean $V_1 = p_2Ap_1B$ y $W_1 = q_2Cq_1D$, como $V_1^j = p_2Ap_1X$ y $W_1^k = q_2Cq_1Y$ tenemos que W_1 y V_1 terminan en la misma letra. Entonces $B = B_1x$ y $D = D_1x$. Luego es $\gamma(P, Q) = c(p_2Ap_1B_1xq_2Cq_1D_1x)$. Como \mathcal{V} y \mathcal{W} son reducidas tenemos que $\bar{p}_2 \neq x$ y $\bar{q}_2 \neq x$. Luego $\gamma(P, Q)$ es reducida.
- ii) Sea (P, Q) par ligado tipo (3), tenemos que $P = p_1Yp_2$, $Q = q_1\bar{Y}q_2$, con $p_1 \neq \bar{q}_2$, $p_2 \neq \bar{q}_1$ y $o(c(q_2\bar{p}_1x_1)) = o(c(\bar{q}_1p_2\bar{x}_2))$ donde $Y = x_1Xx_2$.
Primero observar que V_1 y W_1 no pueden ser ambas vacías porque si $V_1 = W_1 = \emptyset$ entonces si V y W son representaciones lineales de \mathcal{V} y \mathcal{W} que comienzan en p_2 y q_2 respectivamente, tenemos que $Y = V^j$ y $\bar{Y} = W^k$. Como $P = p_1Yp_2$ y $Q = q_1\bar{Y}q_2$, deducimos que $\bar{p}_1 = q_2$ y $\bar{p}_2 = q_1$. Esto contradice la definición de par ligado. Luego V_1 y W_1 no pueden ser ambas vacías. Luego es $\gamma(P, Q) = c(V_1W_1)$ reducida y no vacía.



DEFINICIÓN 3.3. Definimos el mapa lineal $[\cdot, \cdot] : \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ como

$$[\mathcal{V}, \mathcal{W}] := \sum_{(P,Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})} sg(P, Q) \gamma(P, Q).$$

EJEMPLO 3.1. Veamos en un caso particular el cálculo del corchete y del cocorchete. Sea $\mathcal{O} = c(a_1 a_2 \bar{a}_1 \bar{a}_2 a_3 a_4 \bar{a}_3 \bar{a}_4)$. Consideremos las palabras cíclicas reducidas $\mathcal{V} = c(a_1 \bar{a}_3 a_2)$, $\mathcal{W} = c(a_1 \bar{a}_3)$ y $\mathcal{Z} = c(a_2 \bar{a}_4)$.

Como $l(\mathcal{V}) = 3$, $l(\mathcal{W}) = 2$ y $l(\mathcal{Z}) = 2$ tenemos, aplicando la proposición 3.2, que $\#\mathbb{LP}_1(\mathcal{V}) \leq 6$ y $\#\mathbb{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z}) \leq 4$.

Además es fácil ver que $(P_1, Q_1) = (a_1 \bar{a}_3, \bar{a}_3 a_2)$, $(P_2, Q_2) = (a_1 \bar{a}_3, a_2 a_1)$ y $(P_3, Q_3) = (a_2 a_1, \bar{a}_3 a_2)$ son pares ligados de \mathcal{V} , y que $(R_1, S_1) = (a_1 \bar{a}_3, a_2 \bar{a}_4)$, $(R_2, S_2) = (a_1 \bar{a}_3, \bar{a}_4 a_2)$, $(R_3, S_3) = (\bar{a}_3 a_1, a_2 \bar{a}_4)$ y $(R_4, S_4) = (\bar{a}_3 a_1, \bar{a}_4 a_2)$ son pares ligados en $\mathbb{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z})$.

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{LP}_1(\mathcal{V}) &= \{(P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P_3, Q_3), (Q_1, P_1), (Q_2, P_2), (Q_3, P_3)\}, \\ \mathbb{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z}) &= \{(R_1, S_1), (R_2, S_2), (R_3, S_3), (R_4, S_4)\}. \end{aligned}$$

i) *Cálculo del cocorchete*: Recordar que:

$$\delta(\mathcal{V}) = \sum_{(P,Q) \in \mathbb{LP}_1(\mathcal{V})} sg(P, Q) \delta_1(P, Q) \otimes \delta_2(P, Q).$$

Primero calculemos el signo de los pares ligados

$$\begin{aligned} sg(P_1, Q_1) &= o(c(\bar{a}_1 a_3 \bar{a}_3 a_2)) = 1, \\ sg(P_2, Q_2) &= o(c(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 a_1)) = 1, \\ sg(P_3, Q_3) &= o(c(\bar{a}_2 a_3 a_1 a_2)) = 1. \end{aligned}$$

Ahora calculemos $\delta_i(P_j, Q_j)$ donde $i \in \{1, 2\}$ y $j \in \{1, 2, 3\}$,

$$\begin{aligned} \delta_1(P_1, Q_1) &= c(\bar{a}_3), & \delta_2(P_1, Q_1) &= c(a_2 a_1), \\ \delta_1(P_2, Q_2) &= c(\bar{a}_3 a_2), & \delta_2(P_2, Q_2) &= c(a_1), \\ \delta_1(P_3, Q_3) &= c(a_1 \bar{a}_3), & \delta_2(P_3, Q_3) &= c(a_2). \end{aligned}$$

Finalmente tenemos que

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{V}) &= c(\bar{a}_3) \otimes c(a_2 a_1) - c(a_2 a_1) \otimes c(\bar{a}_3) + c(\bar{a}_3 a_2) \otimes c(a_1) \\ &\quad - c(a_1) \otimes c(\bar{a}_3 a_2) + c(a_1 \bar{a}_3) \otimes c(a_2) - c(a_2) \otimes c(a_1 \bar{a}_3). \end{aligned}$$

ii) *Cálculo del corchete*: Recordar que:

$$[\mathcal{W}, \mathcal{Z}] = \sum_{(R,S) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z})} sg(R, S) \gamma(R, S).$$

Primero calculemos el signo de los pares ligados

$$\begin{aligned} sg(R_1, S_1) &= o(c(\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3\bar{a}_4)) = 1, \\ sg(R_2, S_2) &= o(c(\bar{a}_1a_4\bar{a}_3a_2)) = 1, \\ sg(R_3, S_3) &= o(c(a_3\bar{a}_2a_1\bar{a}_4)) = -1, \\ sg(R_4, S_4) &= o(c(a_3a_4a_1a_2)) = 1. \end{aligned}$$

Ahora calculemos $\gamma(R_i, S_i)$ con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

$$\begin{aligned} \gamma(R_1, S_1) &= c(\bar{a}_3a_1\bar{a}_4a_2), \\ \gamma(R_2, S_2) &= c(\bar{a}_3a_1a_2\bar{a}_4), \\ \gamma(R_3, S_3) &= c(a_1\bar{a}_3\bar{a}_4)a_2, \\ \gamma(R_4, S_4) &= c(a_1\bar{a}_3a_2\bar{a}_4). \end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$[\mathcal{W}, \mathcal{Z}] = c(\bar{a}_3a_1\bar{a}_4a_2) + c(\bar{a}_3a_1a_2\bar{a}_4) - c(a_1\bar{a}_3\bar{a}_4a_2) + c(a_1\bar{a}_3a_2\bar{a}_4).$$

CAPÍTULO 4

Correspondencia entre puntos de intersección y pares ligados

El objetivo principal de este capítulo es probar que existe una correspondencia uno a uno entre los pares ligados de una palabra cíclica reducida y los puntos de autointersección de representantes con autointersección minimal y entre los pares ligados de un par de palabras cíclicas y los puntos de intersección de un par de representantes con intersección minimal.

En este capítulo utilizaremos el siguiente resultado

LEMA 0.4. *Sea M una superficie orientada con borde. Hay una correspondencia uno a uno entre dos cualesquiera de los siguientes conjuntos.*

- (1) *Clases de conjugación de elementos no triviales del grupo fundamental de M .*
- (2) *Clases de homotopía libre no triviales de mapas del círculo en M .*
- (3) *Palabras cíclicas reducidas no vacías en $\mathbb{A}_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ donde $1 - n$ es la característica de Euler de M .*

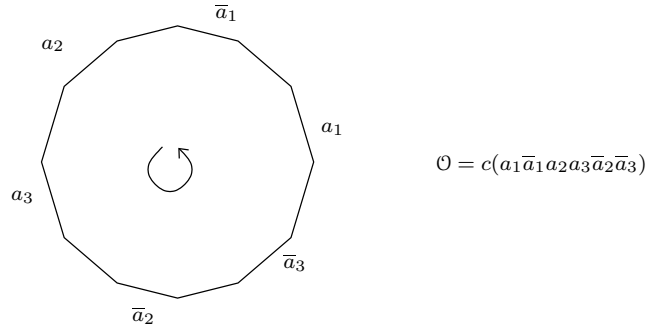
Este lema permite identificar palabras cíclicas reducidas no vacías y clases de homotopía libres no triviales. En este capítulo utilizaremos este resultado clásico, más explícitamente utilizaremos la biyección existente entre las palabras cíclicas y las clases de homotopía libre de una superficie. En la primera sección se ilustra esta correspondencia (sin realizar demostraciones).

Una posible referencia es [9]

1. Arcos representativos

En la sección uno del capítulo tres se definió el *símbolo de superficie* como una palabra cíclica reducida $\mathcal{O} = c(o_1 o_2 \dots o_{2n})$ tal que toda letra de $\mathbb{A}_n \cup \overline{\mathbb{A}_n}$ aparece una sola vez. Sea $P_{\mathcal{O}}$ el $4n$ -agono, donde los lados están ordenados del siguiente modo: elegimos uno de los lados y este será el primero y este lado tendrá la etiqueta o_1 , el segundo lado no tendrá etiqueta, el tercer lado será etiquetado con o_2 , el siguiente no tendrá etiqueta y así seguimos etiquetando los lados.

EJEMPLO 1.1. Consideremos \mathbb{A}_3 y el símbolo de superficie $\mathcal{O} = c(a_1 \bar{a}_1 a_2 a_3 \bar{a}_2 \bar{a}_3)$. Entonces el $P_{\mathcal{O}}$ es:

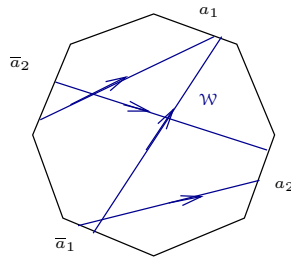


Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ identificamos los lados a_i con los lados \bar{a}_i obteniendo una superficie con borde no vacío $\sum_{\mathcal{O}}$ con característica de Euler $1 - n$. Más aun toda superficie con borde no vacío puede obtenerse a partir de un $4n$ -agono. Sea $\pi : P_{\mathcal{O}} \rightarrow \sum_{\mathcal{O}}$ la proyección y denotamos por E_{x_i} la proyección del lado x_i . Observar que $E_{x_i} = E_{\bar{x}_i}$.

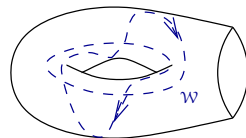
Un lazo en $\sum_{\mathcal{O}}$ es un mapa del círculo en $\sum_{\mathcal{O}}$. De esta forma identificamos una curva cerrada en $P_{\mathcal{O}}$ con su imagen.

Elijamos un punto c en el interior de $P_{\mathcal{O}}$. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, sea q_i y s_i un par de puntos tales que $\pi(q_i) = \pi(s_i)$ y tal que q_i (respectivamente s_i) está en el interior del lado identificado con a_i (respectivamente \bar{a}_i). Notamos por a_i la clase de homotopía del lazo que comienza en $\pi(c)$, recorre la proyección del segmento de c a q_i y luego la proyección del segmento s_i a c . Luego tenemos que $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ es el conjunto de generadores del grupo fundamental de $\sum_{\mathcal{O}}$. Si \mathcal{W} es una palabra cíclica en las letras de \mathbb{A}_n , un lazo α es *representativo* de \mathcal{W} si α es libremente homotópica a la curva β que pasa por c , tal que la clase de homotopía de β escrita en los generadores $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ es una representación lineal de \mathcal{W} .

EJEMPLO 1.2. Si consideramos $\mathcal{O} = c(a_1 a_2 \bar{a}_1 \bar{a}_2)$, entonces $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ es el toro cortado que está cubierto por un 8-agono.



La palabra $\mathcal{W} = c(a_1 a_1 a_2 a_2)$ está representada en el toro y en el 8-agono.



DEFINICIÓN 1.1. Una variedad de dimensión uno (posiblemente con borde) β (respectivamente un par de lazo α, β) en una superficie \sum tiene un *bígono* si existe un par u y v

de sub-arcos de β (respectivamente tales que u es un subarco de α y v es un subarco de β), tales que los extremos de u son iguales a los extremos de v y el lazo formado recorriendo primero u y luego v es homotópicamente nulo en Σ .

CONVENCIÓN: Consideremos una palabra cíclica $\mathcal{W} = c(x_0x_1x_2 \dots x_{m-1})$, para cada $i \in \mathbb{Z}$ x_i denota la letra de \mathcal{W} con subíndice i módulo m .

Sean $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{s-1}$ una sucesión de segmentos orientados de $P_{\mathcal{O}}$ tales que para cada $i \in \{0, 1, \dots, s-2\}$ la proyección del punto final de A_i es igual a la proyección del punto inicial de A_{i+1} , entonces $\pi(A_0)\pi(A_1) \dots \pi(A_{s-1})$ es un arco en $\Sigma_{\mathcal{O}}$. Podemos escribir $\pi(A_iA_{i+1} \dots A_{i+j})$ en lugar de $\pi(A_i)\pi(A_{i+1}) \dots \pi(A_{i+j})$. Es fácil ver que si el punto final de A_{s-1} es igual al punto inicial de A_0 entonces $\pi(A_0A_1 \dots A_{s-1})$ es un loop.

DEFINICIÓN 1.2. Sea $\mathcal{W} = c(x_0x_1x_2 \dots x_{m-1})$ una palabra cíclica reducida. Decimos que α es un *segmento representativo* de \mathcal{W} si existe una secuencia de segmentos orientados $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$ en $P_{\mathcal{O}}$ tal que $\alpha = \pi(A_0A_1 \dots A_{m-1})$ y

- 1) para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, A_i es un arco orientado que comienza en un punto interior del lado \bar{x}_i y termina en un punto en el interior del lado x_{i+1} ;
- 2) para cada $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, A_i intersecta a A_j a lo sumo en un punto;
- 3) el punto final de los arcos A_0, A_1, \dots, A_{m-1} son todos distintos;
- 4) no hay intersecciones triples entre los arcos A_0, A_1, \dots, A_{m-1} ;
- 5) para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, el interior de A_i esta contenido en el interior de $P_{\mathcal{O}}$.

LEMA 1.1. *Sea $\mathcal{W} = c(x_0x_1x_2 \dots x_{m-1})$ una palabra cíclica reducida y sea $\alpha = \pi(A_0A_1 \dots A_{m-1})$ un segmento representativo de \mathcal{W} . Entonces α tiene un bígono si y sólo si existen $i, j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, $i \neq j$ y $k \geq 0$ tales que una de las siguientes condiciones vale:*

- (1) $\pi(A_i) \cap \pi(A_j) \neq \emptyset$, $\pi(A_{i+k}) \cap \pi(A_{j+k}) \neq \emptyset$ y para cada $h \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, $\pi(A_{i+h}) \cap \pi(A_{j+h}) = \emptyset$ y los segmentos A_{i+h} y A_{j+h} recorren los mismos lados del polígono para todo $h \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$;
- (2) $\pi(A_i) \cap \pi(A_j) \neq \emptyset$, $\pi(A_{i+k}) \cap \pi(A_{j-k}) \neq \emptyset$ y para cada $h \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, $\pi(A_{i+h}) \cap \pi(A_{j-h}) = \emptyset$ y los segmentos A_{i+h} y A_{j-h} recorren los mismos lados del polígono para todo $h \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$.

DEMOSTRACIÓN. Vemos primero el recíproco. Si (1) o (2) se cumplen es claro que α tiene un bígono. Veamos uno de los dos casos. Supongamos que se cumple (1), el otro caso es análogo.

Podemos construir el bígono formado por los subarcos $\pi(A_i)\pi(A_{i+1}) \dots \pi(A_{i+k})$ y $\pi(A_j)\pi(A_{j+1}) \dots \pi(A_{j+k})$. Como $\pi(A_i) \cap \pi(A_j) \neq \emptyset$, $\pi(A_{i+k}) \cap \pi(A_{j+k}) \neq \emptyset$ y $\pi(A_{i+h}) \cap \pi(A_{j+h}) = \emptyset$, forman un bígono. Además si consideramos su levantado en $P_{\mathcal{O}}$, que es simplemente conexo, tenemos que es homotópicamente nulo en $\mathcal{P}_{\mathcal{O}}$.

Veamos ahora el directo. Sean U, V subarcos de α que forman un bígono y sean p, q los extremos de U y V . Asumamos que U se recorre de p a q y V se recorre de q a p . La prueba en el otro caso es similar.

Sean $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, $s, l \geq 0$, tales que $p \in \pi(A_i) \cap \pi(A_j)$, $q \in \pi(A_{i+s}) \cap \pi(A_{j-l})$ y s y l son minimales con esta propiedad. Sea $P = x_{i+1}x_{i+2} \dots x_{i+s}$ y $Q = x_{j-l}x_{j-l+1} \dots x_{j-1}$. Dado que la unión de U y V es un loop homotópicamente nulo y \mathcal{W} es reducida, $P = \overline{Q}$. Entonces $s = l$ y $h = s$ y los enteros i, j y h verifican la condición (2).



PROPOSICIÓN 1.2. *Sea $\mathcal{W} = c(x_0x_1x_2 \dots x_{m-1})$ una palabra cíclica reducida primitiva. Entonces existe un segmento representativo $\alpha = \pi(A_0A_1 \dots A_{m-1})$ de \mathcal{W} tal que α no tiene b́igonos.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos U_i y V_i entornos tubulares delgados de los lados a_i y \bar{a}_i respectivamente. La proyección de U_i y de V_i determinan dos lados de E_{a_i} , el lado a_i contiene a $\pi(U_i)$ y el lado \bar{a}_i contiene a $\pi(V_i)$.

Consideremos un loop φ tal que cada pequeño arco de φ intersecciona a $\cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i}$ transversalmente. A φ le asociamos una palabra cíclica \mathcal{V}_φ que describe el camino de φ al cruzar $\cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i}$ de la siguiente manera: elijamos un punto p en $\varphi \setminus \cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i}$. Sea $y_0y_1 \dots y_{k-1}$ una secuencia ordenada de letras de \mathbb{A}_n tal que comenzando en p el primer lado que φ cruza es E_{y_0} , del lado y_0 al lado \bar{y}_0 . El segundo lado que cruza es E_{y_1} del lado y_1 al lado \bar{y}_1 , en general, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ el i -ésimo lado cruzado por φ es $E_{y_{i-1}}$ del lado y_{i-1} al lado \bar{y}_{i-1} . Finalmente tomamos $\mathcal{V}_\varphi = c(y_0y_1 \dots y_{k-1})$.

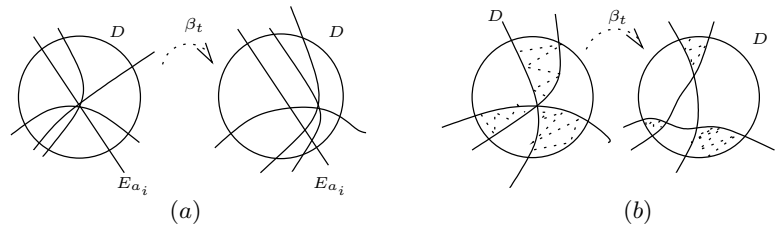
Dotemos a $\sum_{\mathcal{O}}$ con una métrica hiperbólica, con borde hiperbólico, tal que los arcos $\cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i}$ son geodésicos (ver Apéndice B).

Sea β una geodésica representativa de \mathcal{W} . Entonces $\beta \cup (\cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i})$ no tiene b́igonos, porque un b́igono no puede estar formado por dos segmentos geodésicos.

Probemos que \mathcal{V}_φ es reducida y por lo tanto $\mathcal{V}_\varphi = c(x_0x_1 \dots x_{m-1})$. Supongamos que $\mathcal{V}_\varphi = c(y_0y_1 \dots y_{k-1})$ es no reducida, entonces $y_{i+1} = \bar{y}_i$ para algún $i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$. Por lo tanto existe un subarco B de β y un subarco S de E_{y_i} , tal que S y B bordean un disco, esto es absurdo porque tendríamos un b́igono bordeado por geodésicas.

Veamos como construir una homotopía β_t , $t \in [0, 1]$ tal que

- (i) $\beta_0 = \beta$.
- (ii) Para cada $t \in [0, 1]$, $\beta_t \cup (\cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i})$ no tiene b́igonos.
- (iii) Todos los puntos de autointersección de $\beta_1 \cup (\cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i})$ son dobles.
- (iv) Todos los puntos de intersección de los pares de arcos de $\beta_t \cup (\cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i})$ son transversales.



- Si todos los puntos de autointersección de $\beta \cup (\cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i})$ son dobles, el resultado es inmediato, basta perturbar β localmente cuando los puntos de intersección de pares de arcos de $\beta \cup (\cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i})$ no son transversales.
- Si hay puntos de autointersección que no son dobles, los removemos de la siguiente manera: Sea p uno de estos puntos, consideremos un disco D centrado en p tal que cada componente conexa de $D \cap (\beta \cup (\cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i}))$ pase por p .

Primero, supongamos que una de estas componentes conexas está incluida en $\cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i}$. En este caso definimos β como en la figura (a), luego achicamos el disco D , obteniendo la figura (b). Observar que en el segundo paso, si h es el número de componentes conexas de $\beta \cap D$, entonces después de la homotopía hay exactamente $\frac{h(h-1)}{2}$ puntos dobles transversales en D . Podemos asumir que en cada homotopía $\beta \setminus D$ es fijo.

Ahora supongamos que ninguna de las componentes conexas de $D \cap (\beta \cup (\cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i}))$ está incluida en $\cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i}$. Deformamos β como lo hicimos en el segundo paso del caso anterior. De aquí tenemos una homotopía β_t , $t \in [0, v]$ para un $v < 1$, tal que $\beta_0 = \beta$ y el número de puntos de autointersección de $\beta_u \cup (\cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i})$ que no son dobles, es estrictamente menor que el número de puntos de autointersección de $\beta \cup (\cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i})$ que no son dobles. Podemos asumir que todos los puntos de intersección de pares de arcos de $\beta_t \cup (\cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i})$ son transversales para todo $t \in [0, v]$. Veamos ahora que para todo $u \in [0, v]$, $\beta_u \cup (\cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i})$ no tiene b́igonos. Si para alǵun $u \in [0, v]$, $\beta_u \cup (\cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i})$ tiene un b́igono B , podemos encontrar este b́igono B en $\beta_t \cup (\cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i})$. Como todos los puntos de intersección de los arcos son transversales, existe un b́igono en $\beta_t \cup (\cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i})$ para todo $t \in [0, v]$. En particular, existe un b́igono en $\beta \cup (\cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i})$ y esto es absurdo. Entonces podemos extender la homotopía removiendo todos los puntos de autointersección que no son dobles.

Veamos que β_1 no tiene b́igonos. Por (ii), \mathcal{V}_{β_1} es reducida, como lo hicimos antes, podemos probar que $\mathcal{V}_{\beta_1} = c(x_0 x_1 \dots x_{m-1})$.

Sea $\alpha = \beta_1$. Existen m subarcos orientados de α , B_0, B_1, \dots, B_{m-1} y para cada i el interior de B_i no tiene intersección con $\cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i}$ y B_i comienza en E_{x_i} , recorre el lado \bar{x}_i y termina en $E_{x_{i+1}}$, en el lado x_{i+1} . Para cada $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ existe un ́nico arco A_i que une los lados de P_\odot tal que $\pi(A_i) = B_i$. Por lo tanto $\alpha = \pi(A_0 A_1 \dots A_{m-1})$ satisface la propiedad requerida de que los segmentos no tienen b́igonos.



En el caso de potencias no podemos estar seguros de que exista un segmento representativo de una potencia de una palabra ćclica reducida primitiva \mathcal{W}^r , sin embargo sabemos que existen $r-1$ puntos de autointersección ya que la curva se enrolla en si misma r veces. A continuaci3n veremos como resolver este caso.

PROPOSICI3N 1.3. *Sean $r \geq 1$ y $\mathcal{W} = c(y_0 y_1 \dots y_{m-1})^r$ una palabra ćclica reducida tal que $c(y_0 y_1 \dots y_{m-1})$ es primitiva. Entonces existe un segmento representativo de \mathcal{W} , $\alpha = \pi(A_0 A_1 \dots A_{mr-1})$ tal que para todo par $i, j \in \{0, 1, \dots, mr-1\}$ las siguientes condiciones son equivalentes*

- (1) $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ y $i \equiv j \pmod{m}$.
- (2) $i = j$ o $i = mr - 1$ o $j = mr - 1$.

Más aun todos los bígono de α tienen sus puntos finales en la intersección de A_{mr-1} con A_{mj-1} para algún $j \in \{1, 2, \dots, r-1\}$.

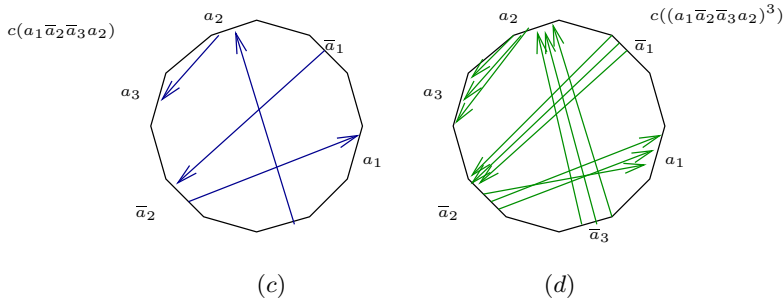
DEMOSTRACIÓN. Por la proposición 1.2 sabemos que existe un segmento representativo γ de $c(y_0 y_1 \dots y_{m-1})$ que no tiene bígono (ver figura (c)). Asumamos que $\gamma = \pi(C_0 C_1 \dots C_{m-1})$.

Veamos como construir un segmento representativo de \mathcal{W} .

Sea $A \subset \sum_{\mathcal{O}}$ una banda que tiene a γ como uno de sus bordes, subdividimos esta banda en $r-1$ subbandas paralelas. Sean $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ los bordes de estas bandas. Podemos recurrir el arco E_{y_0} en dos direcciones posibles, elegimos recorrerlo de la siguiente manera: después de recorrer el arco inicial γ_1 recorreremos E_{y_0} , luego recorreremos el arco γ_2 y así seguimos recorriendo cada γ_i y a E_{y_0} . Cada γ_i es homotópico a γ , transversal a $\cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i}$ y tal que para cada $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $\gamma_i = \pi(D_{i,0} D_{i,1} \dots D_{i,m-1})$, donde $D_{i,j}$ es el arco de $P_{\mathcal{O}}$ que va desde el lado \bar{x}_j al lado x_{j+1} . Más aun, todos los puntos finales de los lados $D_{i,s}$ son diferentes para todo $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ y $s \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ y si $i \neq j$, $D_{i,h} \cap D_{j,h} = \emptyset$ para todo $h \in \{0, 1, \dots, m-1\}$.

Para cada $j \in \{1, 2, \dots, r-1\}$, sea F_j un arco de $P_{\mathcal{O}}$ que une el punto inicial de $D_{j,m-1}$ con el punto final de $D_{j+1,m-1}$. Podemos asumir que para todos $j, k \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ si $j \neq k$ entonces $F_j \cap F_k = \emptyset$.

Sea F_r un arco en $P_{\mathcal{O}}$ que comienza en el punto inicial de $D_{r,m-1}$ y termina en el punto final de $D_{0,m-1}$. También podemos asumir que cada uno de los arcos F_i intersecciona a cada arco $D_{h,l}$ a lo sumo en un punto.



Para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, mr-1\}$ escribimos $i = mr + s$ donde $0 \leq s < m$.

Si $s \neq m-1$ sea $A_i = D_{h+1,s}$ y si $s = m-1$ sea $A_i = F_{h+1}$.

Por definición α es un loop. Más aun α es un segmento representativo.

Asumamos que $\alpha = \pi(A_0 A_1 \dots A_{rm-1})$ tiene un bígono. Sean i, j, k los del lema 1.1, escribimos $i = mh_i + s_i$, $j = mh_j + s_j$ con $0 \leq s_i, s_j \leq m-1$ donde $i, i+k, j, j+k$ son congruentes a $m-1$ módulo m .

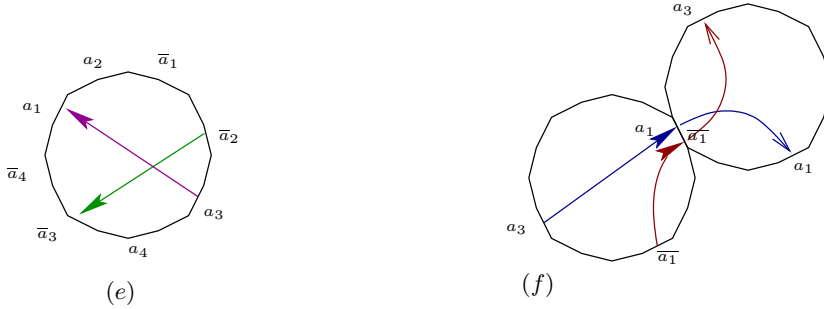
Supongamos que vale el lema 1.1 (1) (si vale el lema 1.1 (2) la prueba puede completarse con argumentos análogos). Como $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ tenemos que $s_i = s_j = m-1$ o $s_i \neq s_j$. Si

$s_i \neq s_j$, $C_{s_i} \cap C_{s_j} \neq \emptyset$ y $C_{s_i+k} \cap C_{s_j+k} \neq \emptyset$. También $C_{s_i+h} \cap C_{s_j+h} = \emptyset$ si $h \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Entonces γ tiene un bígono lo cual es una contradicción. Así que $s_i = s_j = m - 1$, como $A_{i+k} \cap A_{j+k} \neq \emptyset$ y $i + k, j + k$ son congruentes con $m - 1$ módulo m . Por definición, si A_{sm-1} intersecciona a A_{tm-1} , entonces es $s = r$ o $t = r$, esto termina la demostración. ◻

2. Autointersección de curvas y pares ligados

Comencemos estudiando en un ejemplo la relación entre pares de subpalabras de una palabra cíclica reducida y los puntos de autointersección de un segmento representativo.

EJEMPLO 2.1. Sea $\mathcal{O} = c(a_1 a_2 \bar{a}_1 \bar{a}_2 a_3 a_4 \bar{a}_3 \bar{a}_4)$ y consideremos $\mathcal{W} = c(a_1 a_2 \bar{a}_3 a_1 a_1 a_3 \bar{a}_2 a_1)$ (ver la figura (e)). Como $a_2 \bar{a}_3$ y $\bar{a}_3 a_1$ son subpalabras de un representante de \mathcal{W} todo segmento representativo de \mathcal{W} contiene la proyección de dos segmentos transversales, B_1 de \bar{a}_2 a a_3 y B_2 de a_3 a a_1 . La ocurrencia de $a_2 \bar{a}_3$ y $\bar{a}_3 a_1$ como subpalabras de una palabra cíclica implica que para cualquier representante de \mathcal{W} obtendremos un punto de autointersección. Probaremos una generalización de esta afirmación.



Ahora consideremos el par de subpalabras lineales de \mathcal{W} , $a_1 a_1$ y $\bar{a}_3 a_1$ (ver la figura (e)). Como ambos segmentos correspondientes a estos pares de subpalabras terminan en a_1 , la ocurrencia de estas dos subpalabras no nos da suficiente información para deducir la existencia de un punto de autointersección. Para entender mejor esta configuración de segmentos, prolonguemos las palabras que comienzan con $a_1 a_1$ y $\bar{a}_3 a_1$ tal que tengan diferentes letras tanto al principio como al final y estudiemos ahora la intersección de estas nuevas palabras. Consideremos las palabras lineales $\bar{a}_3 a_1 a_1$ y $a_1 a_1 a_3$, en la figura (f) se puede ver el punto de intersección de estas palabras.

A continuación veremos que ciertos pares de subpalabras de \mathcal{W} producen puntos de autointersección de representantes.

DEFINICIÓN 2.1. Sea $\alpha = \pi(A_0 A_1 \dots A_{m-1})$ un segmento representativo de la palabra cíclica reducida $\mathcal{W} = c(x_0 x_1 \dots x_{m-1})$. Llamamos *arco* de α a una subsecuencia finita de segmentos de la secuencia infinita $\prod_{i \in \mathbb{N}} \pi(A_0) \pi(A_1) \dots \pi(A_{m-1})$. La *palabra subyacente* al arco $\pi(A_i A_{i+1} \dots A_{i+j})$ es la subpalabra de \mathcal{W}^∞ , $x_i x_{i+1} \dots x_{i+j+1}$.

DEFINICIÓN 2.2. Sean U, V un par de arcos de los segmentos representativos α y β respectivamente, tal que las palabras subyacentes a U y V son $x_i x_{i+1} \cdots x_{i+j+1}$ e $y_k y_{k+1} \cdots y_{k+j+1}$ respectivamente. Además asumimos que una y solo una de las siguientes condiciones se cumple

- (1) $x_i \neq y_j, x_{i+j+1} \neq y_{k+j+1}$ y $x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_{i+j} = y_{k+1} y_{k+2} \cdots y_{k+j}$;
- (2) $x_i \neq \bar{y}_{k+j+1}, x_{i+j+1} \neq \bar{y}_k$ y $x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_{i+j} = \bar{y}_{k+j} \bar{y}_{k+j-1} \cdots \bar{y}_{k+1}$.

En estas condiciones si $\alpha \neq \beta$ (respectivamente $\alpha = \beta$) decimos que $\{U, V\}$ es un *par semiparalelo* de arcos de α y β (respectivamente de α).

Sean \mathcal{W} una palabra cíclica reducida primitiva de largo m , $r \geq 1$ y $\mathcal{W} = \mathcal{V}^r$. Llamamos segmento representativo de \mathcal{W} como en la proposición 1.2 si $r = 1$ y como en la proposición 1.3 si $r > 1$ minimal. Cuando $r > 1$ y α es un segmento representativo minimal de \mathcal{W} , denotamos por P_α al conjunto de puntos de intersección de $\pi(A_{rm-1})$ con $\pi(A_{km-1})$, para $k \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ y por I_α al conjunto de puntos de autointersección de α que no pertenezcan a P_α . Por lo tanto el conjunto de los puntos de autointersección de un segmento representativo minimal α es la unión disjunta de P_α con I_α . Cuando $r = 1$, P_α es vacío por definición e I_α es el conjunto de puntos de autointersección de α .

LEMA 2.1. *Sea $\mathcal{W} = c(x_0 x_1 \cdots x_{m-1})$ una palabra cíclica reducida y sea α un segmento representativo minimal de \mathcal{W} . Sea p un punto de autointersección de α tal que $p \in I_\alpha$. Entonces existe un único par semiparalelo de arcos de α , $\{U, V\}$ tal que $p \in U \cap V$. Más aun si $U = \pi(A_i A_{i+1} \cdots A_{i+j})$ y $V = \pi(A_k A_{k+1} \cdots A_{k+j})$ entonces $0 \leq j \leq l(\mathcal{W}) - 1$ y existe un único $u \in \{0, 1, \dots, j\}$ tal que $p \in \pi(A_{i+u})$ y $p \in \pi(A_{j+u})$ si se cumple (1) de la definición 2.2 y $p \in \pi(A_{k+j-u})$ si se cumple (2) de la definición 2.2.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $p \in \pi(A_r) \cap \pi(A_s)$. Como \mathcal{W} es una palabra cíclica reducida una de las siguientes afirmaciones se cumple.

- (i) $\{\bar{x}_r, x_{r+1}\} \cap \{\bar{x}_s, x_{s+1}\} = \emptyset$;
- (ii) $\{\bar{x}_r, x_{r+1}\} \cap \{\bar{x}_s, x_{s+1}\} \neq \emptyset$ y $\bar{x}_r = \bar{x}_s$ o $x_{r+1} = x_{s+1}$;
- (iii) $\{\bar{x}_r, x_{r+1}\} \cap \{\bar{x}_s, x_{s+1}\} \neq \emptyset$ y $\bar{x}_r = x_{s+1}$ o $x_{r+1} = \bar{x}_s$.

Si se cumple (i), sea $\{U, V\} = \{\pi(A_r), \pi(A_s)\}$, tomando $i = r, k = s$ y $j = 0$ el resultado se cumple.

En los casos (ii) y (iii) uno puede construir segmentos antes y después de A_r y A_s hasta obtener arcos que comienzan y terminan en diferentes lados. Más precisamente, asumiendo que (ii) se cumple, por el lema 2.2 y dado que $p \notin P_\alpha$, entonces existen enteros $t, l \geq -1$, tales que $1 \leq t + l < l(\mathcal{W}) - 1$ y $t + l$ es máximo con la propiedad

$$x_{r-t} x_{r-t+1} \cdots x_{r+l} = x_{s-t} x_{s-t+1} \cdots x_{s+l}.$$

En este caso sea $\{U, V\} = \{\pi(A_{r-t-1} A_{r-t} \cdots A_{r+l}), \pi(A_{s-t-1} A_{s-t} \cdots A_{s+l})\}$. Claramente se verifica la definición 2.2, entonces tomando $i = r - t - 1 \pmod{m}$, $k = s - t - 1 \pmod{m}$ y $u = t + 1, j = t + l + 1$, la prueba esta completa para este caso.

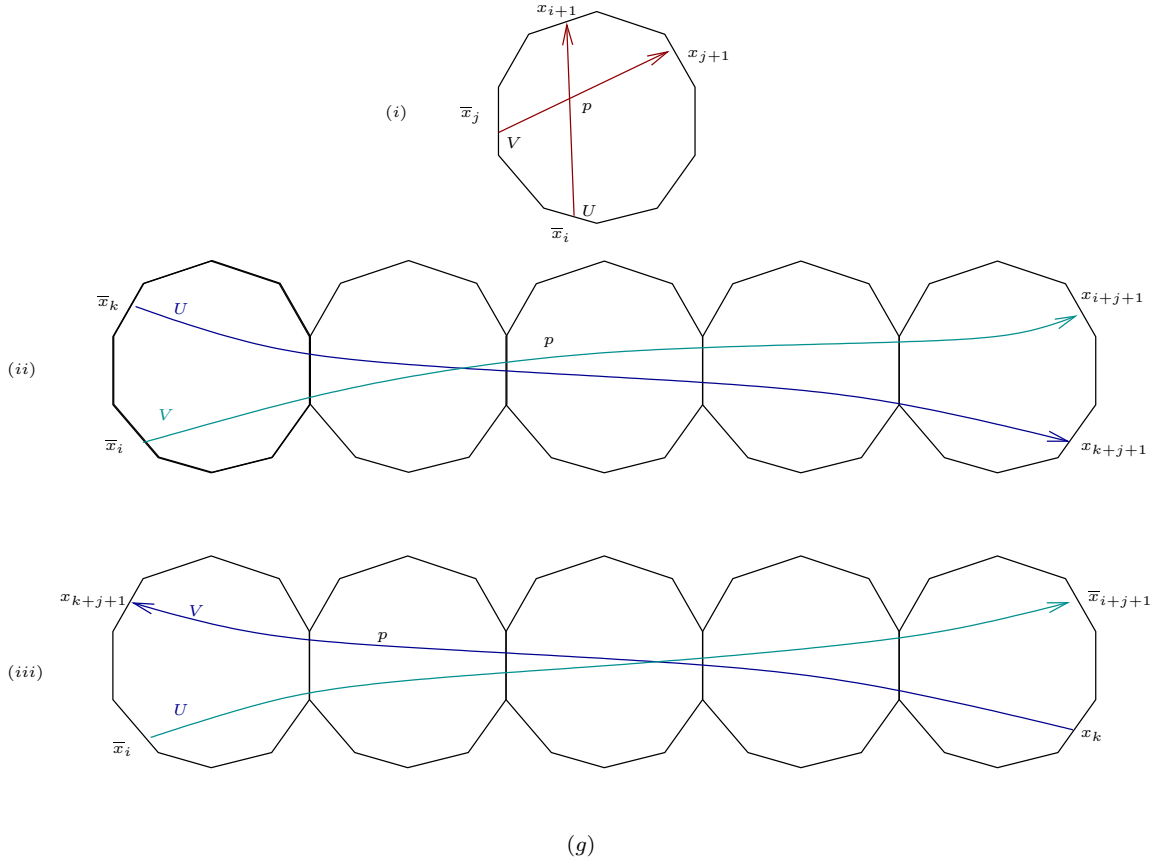
Veamos ahora el caso (iii). Sean t, l enteros no negativos tales que $t + l \geq 1$ y $t + l$ es el máximo entero positivo tal que

$$x_{r-t+1}x_{r-t+2} \cdots x_r x_{r+1} \cdots x_{r+l} = \bar{x}_{s+t}\bar{x}_{s+t-1} \cdots \bar{x}_{s+1}\bar{x}_s \cdots \bar{x}_{s-l+1}.$$

En este caso definimos $U = \pi(A_{r-t}A_{r-t+1} \cdots A_{r+l})$ y $V = \pi(A_{s-l}A_{s-l+1} \cdots A_{s+t})$. Donde $\{U, V\}$ satisfacen la definición 2.2 y tomando $i = r - t - 1 \pmod{m}$, $k = s - l \pmod{m}$ y $u = t$, $j = t + l + 1$ la prueba se completa.



Asociamos a una palabra lineal $x_i x_{i+1} \cdots x_{i+j}$ una secuencia de copias de P_\circ unidos en un cierto sentido. Consideremos $P_\circ^1, P_\circ^2, \dots, P_\circ^{j-1}$, $j - 1$ copias de P_\circ . El conjunto $S = (P_\circ^1 \cup P_\circ^2 \cup \cdots \cup P_\circ^{j-1}) / \sim$, donde \sim es la relación de equivalencia generada por los pares $\{y, z\}$ para los cuales existe $h \in \{1, 2, \dots, j - 1\}$ tal que y está en el borde de P_\circ^{i+h-1} etiquetado con x_{i+h} , $z \in P_\circ^{i+h}$ y z está en el borde de P_\circ^{i+h} etiquetado con \bar{x}_{i+h} y $\pi(y) = \pi(z)$. Un tal conjunto S es una *tira de la palabra* $x_i x_{i+1} \cdots x_{i+j}$ (ver la figura (g)). Observar que para cada $h \in \{1, 2, \dots, j\}$ P_\circ^h está encajado en S . De esta forma podemos pensar que P_\circ^h es un subconjunto de S . El mapa $P_\circ^1 \cup P_\circ^2 \cup \cdots \cup P_\circ^j \rightarrow \sum_\circ$ tal que restringido a cada una de las copias de P_\circ es la proyección π induce un mapa $\Pi : S \rightarrow \sum_\circ$.



El siguiente lema se deduce facilmente del lema 2.1. Este nos permite obtener una parametrización del par semiparalelo de arcos, tal que la intersección de sus imágenes esta en correspondencia uno a uno con los puntos de autointersección que están asignados a este par.

LEMA 2.2. *Sea $U = \pi(A_i A_{i+1} \cdots A_{i+j})$, $V = \pi(A_k A_{k+1} \cdots A_{k+j})$ un par semiparalelo de arcos de un segmento representatico α y sea S la banda subyacente a la palabra U . Entonces existen dos mapas continuos, $\mu, \nu : [0, 1] \rightarrow S$ tal que*

- (1) $\Pi(\text{Im}(\mu)) = U$ y $\Pi(\text{Im}(\nu)) = V$. Más aun, para cada $h \in \{0, 1, 2, \dots, j\}$, $\Pi(\text{Im}(\mu) \cap P_{\odot}^h) = \pi(A_{i+h})$ y si el par de arcos $\{U, V\}$ satisface la definición 2.2 (1) (respectivamente la definición 2.2 (2)) entonces $\Pi(\text{Im}(\nu) \cap P_{\odot}^h) = \pi(A_{k+h})$ (respectivamente $\Pi(\text{Im}(\nu) \cap P_{\odot}^h) = \pi(A_{k+j-h})$).
- (2) Si $C \subset I_{\alpha}$ es el subconjunto de los puntos de autointersección que estan asignados a $\{U, V\}$ por el lema 2.1. Entonces $\pi(\text{Im}(\mu) \cap \text{Im}(\nu)) = C$. Además, la restricción de Π a $\text{Im}(\mu) \cap \text{Im}(\nu)$ es una biyección entre $\text{Im}(\mu) \cap \text{Im}(\nu)$ y C .

TEOREMA 2.3. *Sea $\mathcal{W} = c(x_0 x_1 \cdots x_{m-1})$ una palabra cíclica, ciclicamente reducida en las letras de \mathbb{A}_n y sea α un segmento minimal representativo de \mathcal{W} . Entonces existe una correspondencia uno a uno entre los puntos de autointersección de α en I_{α} y los pares de pares ligados de \mathcal{W} de la forma $\{(P, Q), (Q, P)\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el lema 2.1 tenemos que a diferentes puntos de I_{α} no se les puede asignar el mismo par de arcos. Entonces sean $U = \pi(A_i A_{i+1} \cdots A_{i+j})$, $V = \pi(A_k A_{k+1} \cdots A_{k+j})$ un par semiparalelo de arcos y asumamos que $\{U, V\}$ son asignados a más de un punto. Tomemos dos de estos puntos p, q . Por el lema 2.1 podemos asumir que existen $s, t \in \{0, 1, \dots, j\}$ tales que $s < t$, $p \in \pi(A_{i+s})$, $q \in \pi(A_{i+t})$ y no hay puntos asignados a $\{U, V\}$ en el arco $\pi(A_{i+s+1} \cdots A_{i+t-1})$. Sean μ, ν y S los del lema 2.2 y $P, Q \in S$ tal que $\Pi(P) = p$ y $\Pi(Q) = q$. El subarco de $\text{Im}(\mu)$ de P a Q y el subarco de $\text{Im}(\nu)$ de Q a P forman un disco. Por lo tanto, el subarco de U de p a q y el subarco de V de q a p son borde de un disco. Como los bígono de α tienen puntos finales en P_{α} , $p, q \notin I_{\alpha}$, esto es una contradicción.

Ahora sea $p \in I_{\alpha}$, sea $\{U, V\}$ un par de arcos asignado a p por el lema 2.1 y sean P y Q las palabras asociadas a U y V respectivamente. Sean μ, ν y S como en el lema 2.2. Por lo arriba demostrado, p es el único punto en $\text{Im}(\mu) \cap \text{Im}(\nu)$, por lo cual (P, Q) es un par ligado.

Recíprocamente, si (P, Q) es un par ligado de ocurrencias de subpalabras de \mathcal{W} , U y V son los arcos con palabras asociadas P y Q respectivamente, entonces U, V es un par semiparalelo de arcos. Luego, aplicando el lema 2.2 y por definición de par ligado, se tiene que $\text{Im}(\mu) \cap \text{Im}(\nu)$ contiene un punto simple p (ver figura (g)). El par de arcos asignados a p por el lema 2.1 es $\{U, V\}$. Esto termina la demostración del teorema.



REMARQUEMOS: Por construcción, un segmento minimal representativo de una palabra cíclica reducida primitiva \mathcal{W} tiene una cantidad minimal de puntos de autointersección en su clase de homotopía. Además por el teorema 2.3, el número minimal de puntos de autointersección de pares representativos de \mathcal{W} es igual a un medio del cardinal del conjunto de pares ligados de \mathcal{W} , $\mathbb{L}\mathbb{P}_1(\mathcal{W})$.

3. Puntos de intersección y pares de segmentos representativos

DEFINICIÓN 3.1. Un par de representantes α, β de un par de palabras cíclicas reducidas \mathcal{V} y \mathcal{W} tales que todos los puntos de intersección son dobles transversales tienen *intersección minimal* si todo par de representantes de \mathcal{V} y \mathcal{W} tales que su intersección consiste en una cantidad finita de puntos dobles transversales, tiene una mayor cantidad de puntos de intrsección que α con β .

PROPOSICIÓN 3.1. *Para cada par de palabras cíclicas reducidas \mathcal{V}, \mathcal{W} existe un par de segmentos representativos α y β respectivamente tales que α y β no tienen b́igonos, los puntos finales de arcos de α no intersectan los puntos finales de arcos de β y no hay puntos de intersección triple entre α y β . Además, si α y β no son potencias (positivas o negativas) de alguna palabra cíclica entonces α y β tienen intersección minimal. Finalmente, si \mathcal{V} y \mathcal{W} son potencias (positivas o negativas) de una palabra cíclica primitiva de largo k , $\alpha = \pi(A_0A_1 \dots A_m)$ y $\beta = \pi(B_0B_1 \dots B_l)$, y si k divide $i - j$, para algun $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ y $j \in \{0, 1, \dots, l\}$ entonces $\pi(A_i) \cap \pi(B_j) = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero asumamos que $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1^r$ y $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1^s$ donde \mathcal{V}_1 y \mathcal{W}_1 son dos palabras cíclicas primitivas diferentes, $\mathcal{V}_1 \neq \overline{\mathcal{W}_1}$ y $r, s \geq 1$.

Construyamos dos representaciones de \mathcal{V}_1 y \mathcal{W}_1 α_1 y β_1 , como en la proposición 1.2 consideremos dos geodésicas representativas de \mathcal{V}_1 y \mathcal{W}_1 respectivamente. Observar que $\alpha_1 \cup \beta_1$ no tiene b́igonos. Si existen puntos de intersección triple de $\cup_{1 \leq i \leq n} E_{a_i} \cup \alpha_1 \beta_1$, deformamos $\alpha \cup \beta$ como en la proposición 1.2 a $\alpha_1 \cup \beta_1$ donde α_1 y β_1 son un par de curvas tales que $\alpha_1 \cup \beta_1$ no tiene b́igonos y no tiene puntos de intersección triple. Ahora construimos α y β usando α_2 y β_2 respectivamente como en la prueba de la proposición 1.3. Observas que si α y β tienen un b́igono entonces α_2 y β_2 tienen un b́igono.

El número minimal de puntos de intersección de α y β es igual al número de puntos de intersección de α_1^r y β_1^s (donde la potencia p -esima de un representante corre sobre el representante en tiempo p). Usando esto, no es difıcil ver que α y β tienen intersección minimal.

Ahora asumamos que \mathcal{V} y \mathcal{W} son potencias (positiva o negativa) de una palabra \mathcal{X} . Podemos suponer que \mathcal{X} es primitiva. Sea γ un segmento representativo de \mathcal{X} . Consideremos una banda N en $\sum_{\mathcal{O}}$ de γ , donde las componentes del borde de N son también segmentos representativos de \mathcal{X} . Enonces $N \setminus \gamma$ es unión disjunta de dos bandas, N_1 y N_2 . Sean α y β arcos representativos de \mathcal{V} y \mathcal{W} tal que $\alpha \subset N_1$ y $\beta \subset N_2$ y todo arco de α intersecta todo arco β en a lo sumo un punto. Notar que si α y β tienen un b́igono, entonces γ tiene un b́igono.



La demostración del siguiente resultado es análoga a la demostración del lema 2.1, pero es necesario considerar dos casos separados, los cuales son que cada una de las dos curvas sean potencias (positiva o negativa) de la misma palabra primitiva o no lo sean. En el primer caso uno también necesita aplicar la proposición 2.4 del capítulo dos.

LEMA 3.2. *Sea $\mathcal{V} = c(y_0y_1 \dots y_{h-1})$ y $\mathcal{W} = c(x_0x_1 \dots x_{m-1})$ palabras cíclicas reducidas y sean α, β arcos representativos de \mathcal{V} y \mathcal{W} , respectivamente, como en la proposición 3.1. Sea $p \in \alpha \cap \beta$. Entonces existe un único par semiparalelo de arcos de α y β , $\{U, V\}$ tal que $p \in U \cap V$. Más aun, si $U = \pi(A_iA_{i+1} \dots A_{i+j})$ y $V = \pi(B_kB_{k+1} \dots B_{k+j})$ entonces existe un único $u \in \{0, 1, \dots, j\}$ tal que $p \in \pi(A_{i+u})$ y $p \in \pi(B_{k+u})$ si se cumple la definición 2.2 (1) y $p \in \pi(B_{k+j-u})$ si se cumple la definición 2.2 (2).*

El siguiente resultado es equivalente al teorema 2.3 para pares de palabras cíclicas y la prueba usa ideas análogas.

TEOREMA 3.3. *Sean \mathcal{V} y \mathcal{W} dos palabras cíclicas reducidas primitivas. Sean α y β un par de representantes de \mathcal{V} y \mathcal{W} como en la proposición 3.1. Entonces existe una correspondencia uno a uno entre los puntos de intersección de α con β y $\mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, el conjunto de los pares ligados de \mathcal{V} y \mathcal{W} .*

REMARQUEMOS: Sean \mathcal{V} y \mathcal{W} palabras cíclicas reducidas primitivas. Los arcos representativos minimales de \mathcal{V} y \mathcal{W} tienen intersección minimal y entonces el número minimal de puntos de intersección de \mathcal{V} y \mathcal{W} es igual al cardinal del conjunto de pares ligados de \mathcal{V} y \mathcal{W} , $\mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$.

Estudio combinatorio del espacio de las palabras cíclicas

Este capítulo se divide en tres secciones. Las dos primeras están dedicadas a probar que el espacio de las palabras cíclicas tiene estructura de álgebra de Lie y de coálgebra de Lie utilizando para ello un abordaje combinatorio directo y en la última sección se construye un mapa biyectivo entre el espacio de las curvas sobre una superficie y un espacio de palabras cíclicas, el cual respeta las estructuras algebraicas existentes en cada espacio. Lo cual permite probar que el espacio de palabras cíclicas tiene estructura de biálgebra de Lie.

1. Estructura de coálgebra de Lie

LEMA 1.1. *Sea \mathcal{W} una palabra cíclica reducida. Si $(P, Q) \in \mathbb{LP}_1(\mathcal{W})$ se cumple que $\delta_1(P, Q) = \delta_2(Q, P)$.*

DEMOSTRACIÓN. A cada par ligado $(P, Q) \in \mathbb{LP}_1(\mathcal{W})$ se le asocian dos palabras cíclicas $\delta_1(\mathcal{W}) = c(W_1)$ y $\delta_2(P, Q) = c(W_2)$.

- ◊ Si (P, Q) cumple (1), tenemos que $W_1 = p_2Bq_1$ y $W_2 = q_2Ap_1$. Entonces $\delta_1(P, Q) = c(p_2Bq_1)$. Aplicando el Lema 2.3 tenemos que $(Q, P) \in \mathbb{LP}_1(\mathcal{W})$, luego $\delta_2(Q, P) = c(V_2)$ donde $V_2 = p_2Bq_1$. Entonces es $\delta_2(Q, P) = c(p_2Bq_1) = \delta_1(P, Q)$.
- ◊ Si (P, Q) cumple (2) tenemos que $W_1 = p_2Bq_1Y$ y $W_2 = q_2Ap_1Y$. Entonces $\delta_1(P, Q) = c(p_2Bq_1Y)$. Aplicando el Lema 2.3 tenemos que $(Q, P) \in \mathbb{LP}_1(\mathcal{W})$, luego $\delta_2(Q, P) = c(V_2)$ donde $V_2 = p_2Bq_1Y$. Entonces $\delta_2(Q, P) = c(p_2Bq_1Y) = \delta_1(P, Q)$.
- ◊ Si (P, Q) cumple (3), tenemos que $W_1 = p_2Bq_1$ y $W_2 = q_2Ap_1$. Entonces $\delta_1(P, Q) = c(p_2Bq_1)$. Aplicando el Lema 2.3 tenemos que $(Q, P) \in \mathbb{LP}_1(\mathcal{W})$, luego $\delta_2(Q, P) = c(V_2)$ donde $V_2 = p_2Bq_1$. Entonces $\delta_2(Q, P) = c(p_2Bq_1) = \delta_1(P, Q)$.



COROLARIO 1.2. *Si $(P, Q) \in \mathbb{LP}_1(\mathcal{W})$ se cumple que $\delta_2(P, Q) = \delta_1(Q, P)$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $(P, Q) \in \mathbb{LP}_1(\mathcal{W})$, aplicando el Lema 2.3, $(Q, P) \in \mathbb{LP}_1(\mathcal{W})$. Entonces aplicando el Lema 1.1 tenemos que $\delta_1(Q, P) = \delta_2(P, Q)$.



PROPOSICIÓN 1.3. *Sea \mathcal{W} una palabra cíclica reducida, entonces:*

$$\delta(\mathcal{W}) = \sum_{\{(P,Q),(Q,P)\} \subset \mathbb{LP}_1(\mathcal{W})} sg(P, Q) \{ \delta_1(P, Q) \otimes \delta_2(P, Q) - \delta_2(P, Q) \otimes \delta_1(P, Q) \}$$

$$\delta(\mathcal{W}) = \sum_{\{(Q,P),(P,Q)\} \subset \mathbb{LP}_1(\mathcal{W})} sg(Q, P) \{ \delta_1(Q, P) \otimes \delta_2(Q, P) - \delta_2(Q, P) \otimes \delta_1(Q, P) \}$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{W}) &= \sum_{(P,Q) \in \mathbb{LP}_1(\mathcal{W})} sg(P, Q) \delta_1(P, Q) \otimes \delta_2(P, Q) \\ &= \sum_{\{(P,Q),(Q,P)\} \subset \mathbb{LP}_1(\mathcal{W})} sg(P, Q) \delta_1(P, Q) \otimes \delta_2(P, Q) + sg(Q, P) \delta_1(Q, P) \otimes \delta_2(Q, P) \\ &= \sum_{\{(P,Q),(Q,P)\} \subset \mathbb{LP}_1(\mathcal{W})} sg(P, Q) \{ \delta_1(P, Q) \otimes \delta_2(P, Q) - \delta_1(Q, P) \otimes \delta_1(Q, P) \} \\ &\text{porque } [sg(Q, P) = -sg(P, Q)] \\ &= \sum_{\{(P,Q),(Q,P)\} \subset \mathbb{LP}_1(\mathcal{W})} sg(P, Q) \{ \delta_1(P, Q) \otimes \delta_2(P, Q) - \delta_2(P, Q) \otimes \delta_1(P, Q) \} \\ &\text{porque } [\delta_1(P, Q) = \delta_2(Q, P)] \text{ y } [\delta_2(P, Q) = \delta_1(Q, P)]. \end{aligned}$$

La segunda igualdad se demuestra intercambiando (P, Q) por (Q, P) .

☛

NOTACIÓN: Sea $(R, S) \in \mathbb{LP}_1(\delta_i(P, Q))$, donde $i \in \{1, 2\}$, entonces podemos dividir a $\delta_i(P, Q)$ en (R, S) . Notamos $\delta_{j;i}(R, S) = \delta_j(R, S)_{\delta_i(P, Q)}$, para $j \in \{1, 2\}$.

LEMA 1.4. *Sea \mathcal{W} una palabra cíclica reducida y $(P, Q), (R, S) \in \mathbb{LP}_1(\mathcal{W})$. Si $(R, S) \in \mathbb{LP}_1(\delta_1(P, Q))$ y $(P, Q) \in \mathbb{LP}_1(\delta_2(R, S))$, tenemos las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned} \delta_1(R, S) &= \delta_{11}(R, S), \\ \delta_2(P, Q) &= \delta_{22}(P, Q), \\ \delta_{12}(P, Q) &= \delta_{21}(R, S). \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Si (P, Q) verifica la condición (2) de par ligado, es $P = p_1 Y p_2$, $Q = q_1 Y q_2$ donde $p_1 \neq q_1$, $p_2 \neq q_2$. Por definición $\delta_1(P, Q) = c(W_1)$ y $\delta_2(P, Q) = c(W_2)$ donde $W_1 = p_2 B q_1 Y$ y $W_2 = q_2 A p_1 Y$. Aplicando el lema 2.1 es $\mathcal{W} = c(W_1 W_2) = c(p_2 B q_1 Y q_2 A p_1 Y)$.

- i) Si (R, S) verifica la condición (2) de par ligado, es $R = r_1 Z r_2$, $S = s_1 Z s_2$. Como $(R, S) \in \mathbb{LP}_1(\delta_1(P, Q))$ podemos escribir $c(W_1) = c(p_2 B_1 r_1 Z r_2 C s_1 Z s_2 B_2 q_1 Y)$. Observar que $c(W_1)$ no puede ser $c(p_2 B_1 s_1 Z s_2 C r_1 Z r_2 B_2 q_1 Y)$ porque si lo fuera tenemos que $\mathcal{W} = c(p_2 B_1 s_1 Z s_2 C r_1 Z r_2 B_2 q_1 Y q_2 A p_1 Y)$ entonces $\delta_2(R, S) = c(s_2 C r_1 Z)$, luego $(P, Q) \notin \mathbb{LP}_1(\delta_2(R, S))$. Entonces tenemos que $\delta_1(R, S) =$

$c(r_2Cs_1Z)$, $\delta_2(R, S) = c(s_2B_2q_1Yq_2Ap_1Yp_2B_1r_1Z)$, $\delta_1(P, Q) = c(p_2B_1r_1Zr_2Cs_1Zs_2B_2q_1Y)$ y $\delta_2(P, Q) = c(q_2Ap_1Y)$. Luego es $\delta_{12}(P, Q) = c(p_2B_1r_1Zs_2B_2q_1Y)$, $\delta_{22}(P, Q) = c(q_2Ap_1Y)$, $\delta_{11}(R, S) = c(r_2Cs_1Z)$ y $\delta_{21}(R, S) = c(s_2B_2q_1Yp_2B_1r_1Z)$.

Finalmente tenemos que

$$\delta_1(R, S) = \delta_{11}(R, S), \delta_2(P, Q) = \delta_{22}(P, Q) \text{ y } \delta_{12}(P, Q) = \delta_{21}(R, S).$$

- ii) Si (R, S) verifica la condición (3) de par ligado, es $R = r_1Zr_2$, $S = s_1\bar{Z}s_2$. Como $(R, S) \in \mathbb{LP}_1(\delta_1(P, Q))$ podemos escribir $W_1 = p_2B_1r_1Zr_2Cs_1\bar{Z}s_2B_2q_1Y$. Entonces $\mathcal{W} = c(p_2B_1r_1Zr_2Cs_1\bar{Z}s_2B_2q_1Yq_2Ap_1Y)$. Luego $\delta_1(R, S) = c(r_2Cs_1)$, $\delta_2(R, S) = c(s_2B_2q_1Yq_2Ap_1Yp_2B_1r_1)$, $\delta_1(P, Q) = c(p_2B_1r_1Zr_2Cs_1\bar{Z}s_2B_2q_1Y)$ y $\delta_2(P, Q) = c(q_2Ap_1Y)$. Entonces $\delta_{12}(P, Q) = c(p_2B_1r_1s_2B_2q_1Y)$, $\delta_{22}(P, Q) = c(q_2Ap_1Y)$, $\delta_{11}(R, S) = c(r_2Cs_1)$ y $\delta_{21}(R, S) = c(s_2B_2q_1Yp_2B_1r_1)$.

Finalmente se cumple que

$$\delta_1(R, S) = \delta_{11}(R, S), \delta_2(P, Q) = \delta_{22}(P, Q) \text{ y } \delta_{12}(P, Q) = \delta_{21}(R, S).$$

Si (P, Q) verifica la condición (3) de par ligado, es $P = p_1Yp_2$, $Q = q_1\bar{Y}q_2$ donde $p_1 \neq \bar{q}_2$, $p_2 \neq \bar{q}_1$. Por definición $\delta_1(P, Q) = c(W_1)$ y $\delta_2(P, Q) = c(W_2)$ donde $W_1 = p_2Bq_1$ y $W_2 = q_2Ap_1$. Aplicando el Lema 2.1 es $\mathcal{W} = c(YW_1\bar{Y}W_2) = c(Yp_2Bq_1\bar{Y}q_2Ap_1)$.

- i) Si (R, S) verifica la condición (2) de par ligado, es $R = r_1Zr_2$, $S = s_1Zs_2$. Como $(R, S) \in \mathbb{LP}_1(\delta_1(P, Q))$ podemos escribir $W_1 = p_2B_1r_1Zr_2Cs_1Zs_2B_2q_1$. Entonces $\mathcal{W} = c(Yp_2B_1r_1Zr_2Cs_1Zs_2B_2q_1\bar{Y}q_2Ap_1)$. Por lo tanto $\delta_1(R, S) = c(r_2Cs_1)$, $\delta_2(R, S) = c(s_2B_2q_1\bar{Y}q_2Ap_1Yp_2B_1r_1)$, $\delta_1(P, Q) = c(p_2B_1r_1Zr_2Cs_1Zs_2B_2q_1)$ y $\delta_2(P, Q) = c(q_2Ap_1)$. Entonces tenemos que $\delta_{12}(P, Q) = c(p_2B_1r_1s_2B_2q_1)$, $\delta_{22}(P, Q) = c(q_2Ap_1)$, $\delta_{11}(R, S) = c(r_2Cs_1)$ y $\delta_{21}(R, S) = c(s_2B_2q_1p_2B_1r_1)$.

Luego se verifica que

$$\delta_1(R, S) = \delta_{11}(R, S), \delta_2(P, Q) = \delta_{22}(P, Q) \text{ y } \delta_{12}(P, Q) = \delta_{21}(R, S).$$

- ii) Si (R, S) verifica la condición (3) de par ligado, es $R = r_1Zr_2$, $S = s_1\bar{Z}s_2$. Como $(R, S) \in \mathbb{LP}_1(\delta_1(P, Q))$ podemos escribir $W_1 = p_2B_1r_1Zr_2Cs_1\bar{Z}s_2B_2q_1$. Entonces $\mathcal{W} = c(Yp_2B_1r_1Zr_2Cs_1\bar{Z}s_2B_2q_1\bar{Y}q_2Ap_1)$. Por lo tanto $\delta_1(R, S) = c(r_2Cs_1)$, $\delta_2(R, S) = c(s_2B_2q_1\bar{Y}q_2Ap_1Yp_2B_1r_1)$, $\delta_1(P, Q) = c(p_2B_1r_1Zr_2Cs_1\bar{Z}s_2B_2q_1)$ y $\delta_2(P, Q) = c(q_2Ap_1)$.

Finalmente tenemos que

$$\delta_1(R, S) = \delta_{11}(R, S), \delta_2(P, Q) = \delta_{22}(P, Q) \text{ y } \delta_{12}(P, Q) = \delta_{21}(R, S).$$



COROLARIO 1.5. Sean (P, Q) y (R, S) en $\mathbb{LP}_1(\mathcal{W})$ tales que $(R, S) \in \mathbb{LP}_1(\delta_2(P, Q))$ y $(P, Q) \in \mathbb{LP}_1(\delta_1(R, S))$. Entonces se cumple que:

$$\delta_2(R, S) = \delta_{22}(R, S),$$

$$\delta_1(P, Q) = \delta_{11}(P, Q),$$

$$\delta_{21}(P, Q) = \delta_{12}(R, S).$$

DEMOSTRACIÓN. Se deduce del lema 1.4 intercambiando en su enunciado (P, Q) por (R, S) .

☛

COROLARIO 1.6. Sean \mathcal{W} una palabra cíclica reducida y $(P, Q) \in \mathbb{LP}_1(\mathcal{W})$.

1) Si $(R, S) \in \mathbb{LP}_1(\delta_1(P, Q))$ y $(P, Q) \in \mathbb{LP}_1(\delta_1(R, S))$, se cumple que:

$$\begin{aligned}\delta_2(R, S) &= \delta_{21}(R, S), \\ \delta_2(P, Q) &= \delta_{21}(P, Q), \\ \delta_{11}(P, Q) &= \delta_{11}(R, S).\end{aligned}$$

2) Si $(R, S) \in \mathbb{LP}_1(\delta_2(P, Q))$ y $(P, Q) \in \mathbb{LP}_1(\delta_2(R, S))$, se cumple que:

$$\begin{aligned}\delta_1(R, S) &= \delta_{12}(R, S), \\ \delta_1(P, Q) &= \delta_{12}(P, Q), \\ \delta_{22}(P, Q) &= \delta_{22}(R, S).\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. 1) Si consideramos el par (S, R) , tenemos que $(S, R) \in \mathbb{LP}_1(\delta_1(P, Q))$ y $(P, Q) \in \mathbb{LP}_1(\delta_2(S, R))$. Entonces aplicando el corolario 1.5 tenemos que $\delta_2(S, R) = \delta_{22}(S, R)$, $\delta_1(P, Q) = \delta_{11}(P, Q)$ y $\delta_{21}(P, Q) = \delta_{12}(S, R)$. Aplicando el corolario 1.2 tenemos que $\delta_{22}(P, Q) = \delta_{21}(P, Q)$, $\delta_1(S, R) = \delta_2(R, S)$, $\delta_{11}(S, R) = \delta_{21}(R, S)$, $\delta_{12}(P, Q) = \delta_{11}(P, Q)$ y $\delta_{21}(S, R) = \delta_{11}(R, S)$.

Finalmente tenemos que

$$\delta_2(P, Q) = \delta_{21}(P, Q), \delta_2(R, S) = \delta_{21}(R, S) \text{ y } \delta_{11}(P, Q) = \delta_{11}(R, S).$$

2) Si consideramos el par (Q, P) tenemos que $(R, S) \in \mathbb{LP}_1(\delta_1(Q, P))$ y $(Q, P) \in \mathbb{LP}_1(\delta_2(R, S))$. Entonces aplicando el lema 1.4 tenemos que $\delta_1(R, S) = \delta_{11}(R, S)$, $\delta_2(Q, P) = \delta_{22}(Q, P)$ y $\delta_{12}(Q, P) = \delta_{21}(R, S)$. Aplicando el Corolario 1.2 tenemos que $\delta_1(R, S) = \delta_{12}(R, S)$, $\delta_1(P, Q) = \delta_{12}(P, Q)$ y $\delta_{22}(P, Q) = \delta_{22}(R, S)$.

☛

TEOREMA 1.7. (\mathbb{V}, δ) es una coálgebra de Lie.

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}\delta : \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \\ \delta(\mathcal{W}) &= \sum_{(P, Q) \in \mathbb{LP}_1(\mathcal{W})} sg(P, Q) \delta_1(P, Q) \otimes \delta_2(P, Q).\end{aligned}$$

1) Coantisimetría: $s \circ \delta = -\delta$,

$$\begin{aligned}
s \circ \delta(\mathcal{W}) &= s \left(\sum_{(P,Q) \in \mathbb{L}\mathbb{P}_1(\mathcal{W})} sg(P, Q) \delta_1(P, Q) \otimes \delta_2(P, Q) \right) \\
&= \sum_{(P,Q) \in \mathbb{L}\mathbb{P}_1(\mathcal{W})} sg(P, Q) \delta_2(P, Q) \otimes \delta_1(P, Q) \\
&= \sum_{(Q,P) \in \mathbb{L}\mathbb{P}_1(\mathcal{W})} -sg(Q, P) \delta_2(P, Q) \otimes \delta_1(P, Q) \quad [\text{por el lema 2.3}] \\
&= - \sum_{(Q,P) \in \mathbb{L}\mathbb{P}_1(\mathcal{W})} sg(Q, P) \delta_1(Q, P) \otimes \delta_2(Q, P) \quad [\text{por el lema 1.1}] \\
&= -\delta(\mathcal{W}).
\end{aligned}$$

2) Condición de co-Jacobi: $(id + \varepsilon + \varepsilon^2) \circ (id \otimes \delta) \circ \delta = 0$,

$$\begin{aligned}
\delta(\mathcal{W}) &= \sum_{\{(P,Q), (Q,P)\} \subset \mathbb{L}\mathbb{P}_1(\mathcal{W})} sg(P, Q) \{ \delta_1(P, Q) \otimes \delta_2(P, Q) - \delta_2(P, Q) \otimes \delta_1(P, Q) \}. \\
(id \otimes \delta)(\delta(\mathcal{W})) &= \sum_{\{(P,Q), (Q,P)\} \subset \mathbb{L}\mathbb{P}_1(\mathcal{W})} \sum_{\{(R,S), (R,S)\} \subset \mathbb{L}\mathbb{P}_1(\delta_2(P, Q))} sg(P, Q) sg(R, S) \delta_1(P, Q) \otimes \\
&\quad \delta_{12}(R, S) \otimes \delta_{22}(R, S) - \sum_{\{(P,Q), (Q,P)\} \subset \mathbb{L}\mathbb{P}_1(\mathcal{W})} \sum_{\{(R,S), (R,S)\} \subset \mathbb{L}\mathbb{P}_1(\delta_1(P, Q))} sg(P, Q) \\
&\quad sg(R, S) \delta_2(P, Q) \otimes \delta_{11}(R, S) \otimes \delta_{21}(R, S).
\end{aligned}$$

Sea $(P, Q) \in \mathbb{L}\mathbb{P}_1(\mathcal{W})$.

1) Sea $\{(R, S), (S, R)\} \subset \mathbb{L}\mathbb{P}_1(\delta_2(P, Q))$.

i) Si $\{(P, Q), (Q, P)\} \subset \mathbb{L}\mathbb{P}_1(\delta_1(R, S))$, tenemos que

$$\begin{aligned}
(id \otimes \delta_{(R,S)})(\delta_{(P,Q)}(\mathcal{W})) &= sg(P, Q) sg(R, S) \delta_1(P, Q) \otimes \delta_{12}(R, S) \otimes \delta_{22}(R, S), \\
(id \otimes \delta_{(P,Q)})(\delta_{(R,S)}(\mathcal{W})) &= -sg(P, Q) sg(R, S) \delta_2(R, S) \otimes \delta_{11}(P, Q) \otimes \delta_{21}(P, Q) \\
&= -sg(P, Q) sg(R, S) \delta_{22}(R, S) \otimes \delta_1(P, Q) \otimes \delta_{12}(R, S).
\end{aligned}$$

Entonces

$$(id + \varepsilon + \varepsilon^2)(id \otimes \delta_{(R,S)})(\delta_{(P,Q)}(\mathcal{W})) + (id + \varepsilon + \varepsilon^2)(id \otimes \delta_{(P,Q)})(\delta_{(R,S)}(\mathcal{W})) = 0.$$

ii) Si $\{(P, Q), (Q, P)\} \subset \mathbb{L}\mathbb{P}_1(\delta_2(R, S))$ tenemos que $\{(Q, P), (P, Q)\} \subset \mathbb{L}\mathbb{P}_1(\delta_2(R, S))$ y $\{(R, S), (S, R)\} \subset \mathbb{L}\mathbb{P}_1(\delta_1(Q, P))$, entonces

$$\begin{aligned}
(id \otimes \delta_{(R,S)})(\delta_{(Q,P)}(\mathcal{W})) &= -sg(Q, P) sg(R, S) \delta_2(Q, P) \otimes \delta_{11}(R, S) \otimes \delta_{21}(R, S) \\
(id \otimes \delta_{(Q,P)})(\delta_{(R,S)}(\mathcal{W})) &= sg(Q, P) sg(R, S) \delta_1(R, S) \otimes \delta_{12}(Q, P) \otimes \delta_{22}(Q, P) \\
&= sg(Q, P) sg(R, S) \delta_{11}(R, S) \otimes \delta_{21}(R, S) \otimes \delta_2(Q, P).
\end{aligned}$$

Entonces

$$(id + \varepsilon + \varepsilon^2)(id \otimes \delta_{(R,S)})(\delta_{(Q,P)}(\mathcal{W})) + (id + \varepsilon + \varepsilon^2)(id \otimes \delta_{(Q,P)})(\delta_{(R,S)}(\mathcal{W})) = 0.$$

2) Sea $\{(R, S), (S, R)\} \subset \mathbb{LP}_1(\delta_1(P, Q))$.

i) Si $\{(P, Q), (Q, P)\} \subset \mathbb{LP}_1(\delta_2(R, S))$ tenemos que

$$(id \otimes \delta_{(R,S)})(\delta_{(P,Q)}(\mathcal{W})) = -sg(P, Q)sg(R, S)\delta_2(P, Q) \otimes \delta_{11}(R, S) \otimes \delta_{21}(R, S)$$

$$\begin{aligned} (id \otimes \delta_{(P,Q)})(\delta_{(R,S)}(\mathcal{W})) &= sg(P, Q)sg(R, S)\delta_1(R, S) \otimes \delta_{12}(P, Q) \otimes \delta_{22}(P, Q) \\ &= sg(P, Q)sg(R, S)\delta_{11}(R, S) \otimes \delta_{21}(R, S) \otimes \delta_2(P, Q). \end{aligned}$$

Entonces

$$(id + \varepsilon + \varepsilon^2)(id \otimes \delta_{(R,S)})(\delta_{(P,Q)}(\mathcal{W})) + (id + \varepsilon + \varepsilon^2)(id \otimes \delta_{(P,Q)})(\delta_{(R,S)}(\mathcal{W})) = 0.$$

ii) Si $\{(P, Q), (P, Q)\} \subset \mathbb{LP}_1(\delta_1(R, S))$, tenemos que $\{(P, Q), (P, Q)\} \subset \mathbb{LP}_1(\delta_2(S, R))$ y $\{(S, R), (R, S)\} \subset \mathbb{LP}_1(\delta_1(P, Q))$, entonces

$$(id \otimes \delta_{(S,R)})(\delta_{(P,Q)}(\mathcal{W})) = -sg(P, Q)sg(S, R)\delta_2(P, Q) \otimes \delta_{11}(S, R) \otimes \delta_{21}(S, R)$$

$$\begin{aligned} (id \otimes \delta_{(P,Q)})(\delta_{(S,R)}(\mathcal{W})) &= sg(P, Q)sg(S, R)\delta_1(S, R) \otimes \delta_{12}(P, Q) \otimes \delta_{22}(P, Q) \\ &= sg(P, Q)sg(S, R)\delta_{11}(S, R) \otimes \delta_{21}(S, R) \otimes \delta_2(P, Q). \end{aligned}$$

Entonces

$$(id + \varepsilon + \varepsilon^2)(id \otimes \delta_{(S,R)})(\delta_{(P,Q)}(\mathcal{W})) + (id + \varepsilon + \varepsilon^2)(id \otimes \delta_{(P,Q)})(\delta_{(S,R)}(\mathcal{W})) = 0.$$



2. Estructura de álgebra de Lie

En toda esta sección (P, Q) y (R, S) son pares ligados tipo (2) donde $P = p_1Xp_2$, $Q = q_1Xq_2$, $R = r_1Yr_2$ y $S = s_1Ys_2$.

LEMA 2.1. Sea $(P, Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Entonces $\gamma(P, Q) = \gamma(Q, P)$.

DEMOSTRACIÓN. Dado $(P, Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, aplicando el Lema 2.3 y la definición de $\mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ es $(Q, P) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{V})$.

Sea $(P, Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, entonces $\gamma(P, Q) = c(V_1W_1)$ donde V_1 y W_1 son palabras lineales definidas por:

- i) si (P, Q) verifica (1) o (2), V_1 es la representación lineal de \mathcal{V} obtenida al cortarla inmediatamente antes de p_2 y W_1 es la representación lineal de \mathcal{W} obtenida al cortarla inmediatamente antes de q_2 ,
- ii) si (P, Q) verifica (3), V_1 es la subpalabra lineal de \mathcal{V} que comienza después de la última letra de Y y termina antes de la primer letra de Y y W_1 es la subpalabra lineal de \mathcal{W} que comienza después de la última letra de \overline{Y} y termina antes de la primer letra de \overline{Y} .

Como $(Q, P) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{V})$. Tenemos que $\gamma(Q, P) = c(W_2V_2)$, donde V_2 y W_2 se definen como V_1 y W_1 .

Es inmediato que $\gamma(P, Q) = \gamma(Q, P)$.



LEMA 2.2. Si $V = x_1x_2 \dots x_m$ es una palabra lineal y para algún $i \in \{2, 3, \dots, m\}$ es $V = x_{i+1}x_{i+2} \dots x_mx_1x_2 \dots x_i$ entonces existe una palabra lineal W y un entero positivo r tal que $r \geq 2$, $V = W^r$ y $l(W)$ divide a i .

DEMOSTRACIÓN. Sea $V = x_1x_2 \dots x_m = x_{i+1}x_{i+2} \dots x_mx_1x_2 \dots x_i$.
Dividamos el problema en dos casos.

1) Si i divide a m . Entonces es $m = ni$. Luego es

$$V = x_1x_2 \dots x_ix_{i+1} \dots x_{i+i} \dots x_{(n-1)i}x_{(n-1)i+1} \dots x_nix_{i+1}x_{i+2} \dots x_nix_1x_2 \dots x_i.$$

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} x_1 \dots x_i &= x_{i+1} \dots x_{2i}, \\ x_{i+1} \dots x_{2i} &= x_{2i+1} \dots x_{3i}, \\ &\vdots \\ x_{(n-1)i+1} \dots x_{ni} &= x_1 \dots x_i. \end{aligned}$$

Entonces es $W = x_1 \dots x_i$ y $V = W^n$, en particular tenemos que $l(W) = i$.

2) Si i no divide a m , demostraremos el resultado por inducción completa en la longitud de la palabra.

Como i no divide a m tenemos que $m = ni + r$. En particular $i < m$.

Veamos primero el caso $m = 3$ e $i = 2$. Tenemos que

$$V = x_1x_2x_3 = x_3x_1x_2,$$

entonces es $x_1 = x_3$, $x_2 = x_1$ y $x_3 = x_2$. Luego es $V = W^3$, donde $W = x_1$.

En general tenemos que

$$x_1 \dots x_r x_{r+1} \dots x_{r+j} \dots x_{r+i} x_{r+i+1} \dots x_{r+ni} = x_{i+1} \dots x_{ni+r} x_1 \dots x_i.$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} x_{r+(n-1)i+1} \dots x_{r+ni} &= x_1 \dots x_i, \\ &\vdots \\ x_{r+li+1} \dots x_{r+(l+1)i} &= x_1 \dots x_i, \\ &\vdots \\ x_{r+1} \dots x_{r+i} &= x_1 \dots x_i. \end{aligned}$$

Además tenemos que:

$$\begin{aligned} x_1 \dots x_i &= x_1 \dots x_r x_{r+1} \dots x_i, \\ x_1 \dots x_r &= x_{i+1} \dots x_{i+r}. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que $x_1 \dots x_i = x_{r+1} \dots x_{r+i} = x_{r+1} \dots x_i x_1 \dots x_r$. Entonces $x_1 \dots x_i = x_{r+1} \dots x_i x_1 \dots x_r$. Luego aplicando la hipótesis de inducción a $x_1 \dots x_i$ tenemos que existe W palabra lineal tal que $x_1 \dots x_i = W^k$, donde $l(W)$ divide a

r . Entonces tenemos que $x_1 \dots x_r = W^s$ y por lo tanto $V = W^{s+nk}$ y $l(W)$ divide a i .

☛

LEMA 2.3. Sean \mathcal{V} , \mathcal{W} palabras cíclicas que no son potencias de la misma palabra cíclica y sea P una palabra lineal. Sean k y l un par de enteros positivos tales que P es una subpalabra de \mathcal{V}^k y P o \overline{P} es una subpalabra de \mathcal{W}^l . Podemos asumir que $(k-1)l(\mathcal{V}) < l(P)$ y $(l-1)l(\mathcal{W}) < l(P)$. Entonces $l(P) < l(\mathcal{V}) + l(\mathcal{W})$.

DEMOSTRACIÓN. Podemos tomar a k y l enteros positivos mínimos que verifican que P es una subpalabra (de algún representante) de \mathcal{V}^k y una subpalabra (de algún representante) de \mathcal{W}^l . Entonces P no es una subpalabra de \mathcal{V}^{k-1} y P no es una subpalabra de \mathcal{W}^{l-1} . Luego tenemos que $l(P) > (k-1)l(\mathcal{V})$ y $l(P) > (l-1)l(\mathcal{W})$.

- i) Consideremos P subpalabra de \mathcal{V}^k y de \mathcal{W}^l . Supongamos que $l(P) \geq l(\mathcal{V}) + l(\mathcal{W})$. Entonces podemos escribir P como $P = p_0 p_1 p_2 \dots p_{m-1}$ donde $m \geq l(\mathcal{V}) + l(\mathcal{W})$. Como P es una subpalabra de \mathcal{W}^l tenemos que

$$p_0 p_1 \dots p_{l(\mathcal{V})-1} = p_{l(\mathcal{W})} p_{l(\mathcal{W})+1} \dots p_{l(\mathcal{W})+l(\mathcal{V})-1}.$$

Sea r el resto de dividir $l(\mathcal{W})$ entre $l(\mathcal{V})$. Como \mathcal{V} y \mathcal{W} no son potencias de la misma palabra cíclica es $r > 0$. Entonces, como P es una subpalabra de \mathcal{V}^k tenemos que

$$p_{l(\mathcal{W})} p_{l(\mathcal{W})+1} \dots p_{l(\mathcal{W})+l(\mathcal{V})-1} = p_r p_{r+1} \dots p_{r+l(\mathcal{V})-1} = p_r p_{r+1} \dots p_{l(\mathcal{V})-1} p_0 p_1 \dots p_{r-1}.$$

Por el lema 2.2 tenemos que existe una palabra lineal X y un entero positivo d tal que $l(X)$ divide a r y $p_0 p_1 \dots p_{l(\mathcal{V})-1} = X^d$. Entonces $\mathcal{V} = c(X)^d$. Como $l(X)$ divide a r y a $l(\mathcal{V})$ divide a $l(\mathcal{W})$. Luego \mathcal{W} es también potencia de $c(X)$ y esto contradice la hipótesis. Luego $l(P) < l(\mathcal{V}) + l(\mathcal{W})$.

- ii) Consideremos ahora P subpalabra de \mathcal{V}^k y \overline{P} subpalabra de \mathcal{W}^l . Recordar que \overline{P} subpalabra de \mathcal{W}^l si y sólo si P es una subpalabra de $\overline{\mathcal{W}}$. Entonces cambiamos \mathcal{W} por $\overline{\mathcal{W}}$ y aplicamos el caso i), luego $l(P) < l(\mathcal{V}) + l(\overline{\mathcal{W}}) = l(\mathcal{V}) + l(\mathcal{W})$.

☛

OBSERVACIÓN 2.1. Sean \mathcal{V} y \mathcal{W} palabras cíclicas reducidas y $(P, Q) \in \mathbb{L}\mathbb{P}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Entonces:

- i) Si $l(\mathcal{V}) = l(\mathcal{W})$ entonces $P \subset \mathcal{V}$ y $Q \subset \mathcal{W}$.
 ii) Si $l(\mathcal{V}) < l(\mathcal{W})$, W_1 no es una potencia de V_1 .

DEMOSTRACIÓN. i) Primero observar que dado que $l(\mathcal{V}) = l(\mathcal{W})$, si $P \subset \mathcal{V}^k$ entonces $Q \subset \mathcal{W}^k$.

Supongamos que $k \neq 1$, luego es $P = p_1 X p_2$ con $X = B V_1^{k-1}$ y $Q = q_1 X q_2$ con $X = C W_1^{k-1}$. Como $l(V_1) = l(W_1)$ son $V_1 = W_1$, en particular tenemos que $p_2 = q_2$ y esto contradice que forman un par ligado, entonces $k = 1$.

- ii) Sean \mathcal{V} y \mathcal{W} palabras cíclicas tales que $l(\mathcal{V}) < l(\mathcal{W})$. Si $W_1 = V_1^k$, entonces tenemos que $W_1 = q_2A = V_1^k$, donde $V_1 = p_2B$. Luego es $W_1 = p_2BV_1^{k-1}$ y por lo tanto $q_2 = p_2$ y esto contradice que (P, Q) formen un par ligado.



PROPOSICIÓN 2.4. *Sean \mathcal{V} y \mathcal{W} dos palabras cíclicas reducidas. Entonces $\mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ es el conjunto de todos los pares ligados (P, Q) tales que P es la ocurrencia de una subpalabra de \mathcal{V}^j , Q es la ocurrencia de una subpalabra de \mathcal{W}^k , con $l(\mathcal{V}^{j-1}) < l(P) \leq l(\mathcal{V}^j)$, $l(\mathcal{W}^{k-1}) < l(Q) \leq l(\mathcal{W}^k)$ donde j y k son enteros positivos tales que $j \leq 2 + \frac{l(\mathcal{W})}{l(\mathcal{V})}$ y $k \leq 2 + \frac{l(\mathcal{V})}{l(\mathcal{W})}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por la definición de $\mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, si $(P, Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ es P una ocurrencia de una subpalabra de \mathcal{V}^j , para algún j y Q es la ocurrencia de una subpalabra de \mathcal{W}^k para algún k . Entonces primero podemos tomar j y k , los mínimos enteros que verifiquen esta condición, es decir $l(\mathcal{V}^{j-1}) < l(P) \leq l(\mathcal{V}^j)$ y $l(\mathcal{W}^{k-1}) < l(Q) \leq l(\mathcal{W}^k)$.

Supongamos que (P, Q) es un par ligado tipo (2). El caso (3) es análogo.

• Si $l(\mathcal{V}) = l(\mathcal{W})$, aplicando la observación 2.1 tenemos que $P \subset \mathcal{V}$ y $Q \subset \mathcal{W}$, entonces son $j = k = 1$ y el resultado se verifica automáticamente.

• Supongamos que $l(\mathcal{V}) < l(\mathcal{W})$. En general tenemos, aplicando el lema 2.3 que $l(Q) = 2 + l(X) < 2 + l(\mathcal{V}) + l(\mathcal{W})$. Luego como $l(\mathcal{V}) < l(\mathcal{W})$ tenemos que $l(Q) \leq 2l(\mathcal{W})$. Por lo tanto $k \leq 2 \leq 2 + \frac{l(\mathcal{V})}{l(\mathcal{W})}$.

De igual forma que para Q , tenemos que $l(P) = 2 + l(X) \leq l(\mathcal{V}) + l(\mathcal{W}) + 1$. Además es $l(\mathcal{V}^{j-1}) < l(P)$, entonces $(j-1)l(\mathcal{V}) < l(P) \leq l(\mathcal{V}) + l(\mathcal{W}) + 1$. Luego es $(j-1)l(\mathcal{V}) \leq l(\mathcal{V}) + l(\mathcal{W})$. De donde se deduce que $j \leq 2 + \frac{l(\mathcal{W})}{l(\mathcal{V})}$.



En el ejemplo siguiente veremos que la cota es óptima, es decir existe un par ligado $(P, Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, donde $l(\mathcal{V}) < l(\mathcal{W})$ y $P \subset \mathcal{V}^4$, $Q \subset \mathcal{W}^2$.

EJEMPLO 2.1. Sea $\mathcal{O} = c(a_1a_2\bar{a}_1\bar{a}_2)$ y sean $\mathcal{V} = c(a_1a_1a_2)$ y $\mathcal{W} = c(a_1a_1a_2a_1a_1a_2a_1)$.

Consideremos $P = a_2a_1a_1a_2a_1a_1a_2a_1a_1a_2$ y $Q = a_1a_1a_1a_2a_1a_1a_2a_1a_1a_1$.

Tenemos que $V_1 = a_2a_1a_1$ y $W_1 = a_2a_1a_1a_2a_1a_1a_1$. Luego es

$$\begin{aligned} V_1^4 &= a_1a_1a_2a_1a_1a_2a_1a_1a_2a_1a_1a_2 \\ &= a_1a_1P, \\ W_1^2 &= a_2a_1a_1a_2a_1a_1a_2a_1a_1a_2a_1a_1a_1 \\ &= a_2a_1a_1a_2Q. \end{aligned}$$

Además es claro que $o(c(a_2a_1\bar{a}_1)) = o(c(\bar{a}_2\bar{a}_1a_1))$. Entonces es $(P, Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, donde $j = 2$.

PROPOSICIÓN 2.5. *Si $(P, Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, donde $l(\mathcal{W}) \geq l(\mathcal{V})$ tenemos que $Q \in \mathcal{W}^j$ con $j \leq 2$. En particular tenemos que si el mínimo j es 2 y $W_1 = q_2B_1q_1B_2$ es la*

representación lineal de \mathcal{W} que comienza en q_2 entonces $W_1^2 = q_2 B_1 q_1 X$, donde $X = B_2 q_2 B_1 q_1 B_2$.

DEMOSTRACIÓN. Primero observar que si $l(\mathcal{V}) = l(\mathcal{W})$, por la observación 2.1 si $(P, Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ tenemos que tanto P como Q son subpalabras de \mathcal{V} y de \mathcal{W} respectivamente.

Veamos ahora el caso $l(\mathcal{V}) < l(\mathcal{W})$. Sean $V_1 = p_2 A p_1 B$ y $W_1 = q_2 B_1 q_1 B_2$ representaciones lineales de \mathcal{V} y \mathcal{W} respectivamente.

Si $j = 2$ tenemos que $W_1^2 = q_2 B_1 q_1 B_2 q_2 B_1 q_1 B_2$. Como $Q \subset \mathcal{W}^2$ y $Q \notin \mathcal{W}$ tenemos que $Q = q_1 B_2 q_2 B_1 q_1 B_2 q_2$, entonces $X = B_2 q_2 B_1 q_1 B_2$ y en particular $W_1^2 = q_2 B_1 q_1 X$.

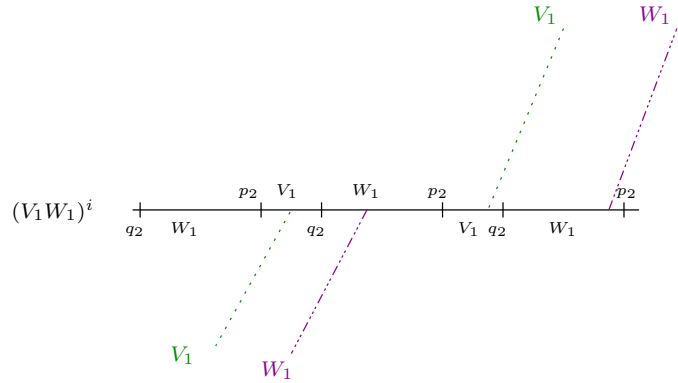
El hecho que $j \leq 2$ es un corolario inmediato de la Proposición 2.4.

◻

PROPOSICIÓN 2.6. Sea $(P, Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, entonces existen $(P_1, Q_1) \in \mathbb{LP}_2(\gamma(P, Q), \mathcal{W})$ y $(P_2, Q_2) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \gamma(P, Q))$, donde $P_1 = p_1 X W_1 p_2$, $Q_1 = q_1 X W_1 q_2$, $P_2 = p_1 X V_1 p_2$ y $Q_2 = q_1 X V_1 q_2$.

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $l(\mathcal{V}) \leq l(\mathcal{W})$.

- i) Si $l(\mathcal{V}) = l(\mathcal{W})$ aplicando la observación 2.1 son $Q \subset \mathcal{V}$ y $P \subset \mathcal{W}$. En este caso tenemos que $V_1 = p_2 B p_1 X$ y $W_1 = q_2 A q_1 X$. Entonces $\gamma(P, Q) = c(V_1 W_1) = c(p_2 B p_1 X q_2 A q_1 X)$ y $V_1 W_1 V_1 W_1 = p_2 B p_1 X q_2 A q_1 X p_2 B p_1 X q_2 A q_1 X$, por lo tanto son $P_1 = p_1 X q_2 A q_1 X p_2$ y $Q_2 = q_1 X p_2 B p_1 X q_2$ subpalabras de $(V_1 W_1)^2$. Además es claro que $Q_1 = q_1 X q_2 A q_1 X q_2 = q_1 X W_1 q_2$ es una subpalabra de una potencia de \mathcal{W} y $P_2 = p_1 X p_2 B p_1 X p_2 = p_1 X V_1 p_2$ es una subpalabra de una potencia de \mathcal{V} . Además son (P_1, Q_1) y (P_2, Q_2) pares ligados ya que (P, Q) es un par ligado. Luego son $(P_1, Q_1) \in \mathbb{LP}_2(\gamma(P, Q), \mathcal{W})$ y $(P_2, Q_2) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \gamma(P, Q))$.
- ii) Si $l(\mathcal{V}) < l(\mathcal{W})$ tenemos que:

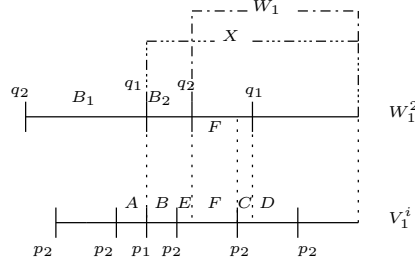


Probemos que $(P_1, Q_1) \in \mathbb{LP}_2(\gamma(P, Q), \mathcal{W})$. Supongamos que $j = 2$, el caso $j = 1$ es análogo al caso (i).

Sea $P = p_1 X p_2$ y $Q = q_1 X q_2$ y consideramos $V_1 = p_2 A p_1 B$ y $W_1 = q_2 B_1 q_1 B_2$ representaciones lineales de \mathcal{V} y \mathcal{W} que comienzan en p_2 y q_2 respectivamente.

Aplicando el lema 2.5 tenemos que $W_1^2 = q_2 B_1 q_1 X$, donde $X = B_2 q_2 B_1 q_1 B_2$.

Por otro lado, como $P \in \mathcal{V}^i$, es $V_1^i = p_2 A p_1 X$, donde $X = B V_1^{i-1}$ con $i \geq 2$ porque $l(\mathcal{W}) > l(\mathcal{V})$ y $j = 2$, es decir que $Q \subset W_1^2$.



Como $l(\mathcal{V}) < l(\mathcal{W})$ tenemos que $W_1 = q_2 F V_1^j = q_2 F V_1^l C q_1 B_2$, donde $V_1 = p_2 C q_1 D$ y $V_1 = p_2 E q_2 F$ (ver figura).

Además tenemos que $B_2 = D V_1^k$ y $B_2 = B V_1^k p_2 E$.

Veamos que $P_1 = p_1 X W_1 p_2$ y $Q_1 = q_1 X W_1 q_2$ es un par ligado de $\gamma(P, Q)$ y \mathcal{W} .

Es claro que (P_1, Q_1) es par ligado, porque (P, Q) es par ligado. Hay que probar que P_1 es una subpalabra de alguna potencia de $\gamma(P, Q)$ y Q_1 es una subpalabra de alguna potencia de \mathcal{W} .

Probemos primero que Q_1 es una subpalabra de alguna potencia de \mathcal{W} . Por hipótesis sabemos que $Q = q_1 X q_2$ es una subpalabra de alguna potencia de \mathcal{W} . Además como $l(\mathcal{V}) < l(\mathcal{W})$ es $W_1^2 = q_2 B_1 q_1 X$, entonces $W_1^4 = q_2 B_1 q_1 X W_1 q_2 B_1 q_1 G$ luego es $Q_1 \subset W_1^4$. Entonces es Q_1 una subpalabra de una potencia de \mathcal{W} .

Probemos ahora que P_1 es una subpalabra de $(\mathcal{V}\mathcal{W})^i$.

$$P_1 = p_1 X W_1 p_2 \quad [\text{def de } P_1].$$

$$W_1 V_1 = q_2 F V_1^j V_1 \quad [\text{descomposición de } W_1]$$

$$= q_2 F V_1 V_1^i$$

$$= q_2 F p_2 E q_2 F V_1^j \quad [\text{descomposición de } V_1]$$

$$= q_2 F p_2 E W_1 \quad [\text{descomposición de } W_1].$$

$$W_1 V_1 W_1 V_1 = q_2 F p_2 E W_1 q_2 F p_2 E W_1$$

$$= q_2 F p_2 E q_2 B_1 q_1 B V_1^k p_2 E q_2 F p_2 E W_1 \quad [\text{descomposición de } W_1]$$

$$= q_2 F p_2 E q_2 B_1 q_1 B V_1 V_1^{k-1} p_2 E q_2 F p_2 E W_1$$

$$= q_2 F p_2 E q_2 B_1 q_1 B V_1 V_1^k p_2 E W_1 \quad [\text{descomposición de } V_1]$$

$$= q_2 F p_2 E q_2 B_1 q_1 B p_2 A p_1 B V_1^k p_2 E W_1 \quad [\text{descomposición de } V_1]$$

$$= q_2 F p_2 E q_2 B_1 q_1 B p_2 A p_1 B_2 W_1 \quad [\text{descomposición de } B_2]$$

$$= q_2 F p_2 E q_2 B_1 q_1 B p_2 A p_1 X \quad [\text{descomposición de } X].$$

Entonces $W_1 V_1 W_1 V_1 W_1 V_1 = q_2 F p_2 E q_2 B_1 q_1 B p_2 A p_1 X W_1 p_2 A p_1 B$. Luego es $P_1 \subset W_1 V_1 W_1 V_1 W_1 V_1$. Entonces P_1 es una subpalabra de $(V_1 W_1)^4$.

Probemos ahora que $(P_2, Q_2) \in \mathbb{L}\mathbb{P}_2(\mathcal{V}, \gamma(P, Q))$.

Es claro que forman un par ligado, porque (P, Q) es un par ligado.

Igual que en el caso anterior tenemos que $V_1 = p_2Ap_1B$, $W_1 = q_2B_1q_1B_2$ y $W_1^2 = q_2B_1q_1X$. Además es $V_1^i = p_2Ap_1X$ entonces $V_1^{i+2} = p_2Ap_1XV_1^2$. Como $V_1 = p_2Ap_1B$ es $V_1^{i+2} = p_2Ap_1XV_1p_2Ap_1B$. Entonces es $P_1 \subset V_1^{i+1}$.

Probemos ahora que Q_2 es una subpalabra de alguna potencia de $\gamma(P, Q)$.

$$\begin{aligned} Q_2 &= q_1XV_1q_2 && [\text{def. de } Q_2]. \\ V_1W_1V_1W_1 &= V_1W_1V_1q_2Bq_1B_2 && [W_1 \text{ rep. de } \mathcal{W}]. \\ W_1^2 &= q_2Bq_1X \\ V_1 &= Hq_1B_2 && [\text{porque } l(X) < l(V_1) + l(W_1)]. \end{aligned}$$

Luego es

$$\begin{aligned} V_1W_1V_1W_1 &= Hq_1B_2W_1V_1q_2B_1q_1B_2 \\ &= Hq_1XV_1q_2B_1q_1B_2 && [\text{porque } X = B_2W_1]. \\ &= HQ_2B_1q_1B_2. \end{aligned}$$

Entonces $Q_2 \subset (V_1W_1)^2$.

♣

LEMA 2.7. *Sea $(P, Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, donde $P = p_1Xp_2$ y $Q = q_1Xq_2$. Entonces $X \subset \gamma(P, Q)^2$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos $l(\mathcal{V}) \leq l(\mathcal{W})$. Si $l(\mathcal{V}) = l(\mathcal{W})$ el resultado es inmediato. Supongamos ahora que $l(\mathcal{V}) < l(\mathcal{W})$. Por definición $\gamma(P, Q) = c(V_1W_1)$, donde podemos escribir $V_1 = p_2Ap_1B$ y $Q_1 = q_2B_1q_1B_2$ representaciones lineales de \mathcal{V} y \mathcal{W} respectivamente.

Aplicando el lema 2.5 tenemos que $X = B_2W_1$ y $W_1^2 = q_2B_1q_1X$. Entonces para probar que X es una subpalabra de algún representante lineal de $\gamma(P, Q)^2$ basta probar que W_1^2 es una subpalabra de un representante lineal de $\gamma(P, Q)^2$.

$$\begin{aligned} \gamma(P, Q)^2 &= V_1W_1V_1W_1 && [\text{definición de } \gamma(P, Q)] \\ &= V_1q_2FV_1^jV_1W_1 && [l(\mathcal{V}) < l(\mathcal{W}) \text{ ent. por la prop. 2.6 } W_1 = q_2FV_1^j] \\ &= V_1q_2FV_1V_1^jW_1 \\ &= V_1q_2Fp_2Eq_2FV_1^jW_1 && [l(\mathcal{V}) < l(\mathcal{W}) \text{ por la prop 2.6 es } V_1 = p_2Eq_2F] \\ &= V_1q_2Fp_2EW_1W_1 && [W_1 = q_2FV_1^j]. \end{aligned}$$

Luego es $V_1W_1V_1W_1 = V_1q_2Fp_2EW_1W_1$. Entonces $W_1^2 \subset (V_1W_1)^2$.

♣

Los lemas siguientes son necesarios para la demostración de la estructura de álgebra de Lie del espacio de las palabras cíclicas. Dados $(P, Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ y $(R, S) \in \mathbb{LP}_2(\gamma(P, Q), \mathcal{Z})$ ellos garantizan la existencia de pares ligados (P_1, Q_1) y (R_1, S_1) tales

que el sumando

$[[\mathcal{V}, \mathcal{W}]_{(P,Q)}, \mathcal{Z}]_{(R,S)}$ se cancela con alguno de los sumandos de $[[\mathcal{W}, \mathcal{Z}], \mathcal{V}]$ o $[[\mathcal{Z}, \mathcal{V}], \mathcal{W}]$.

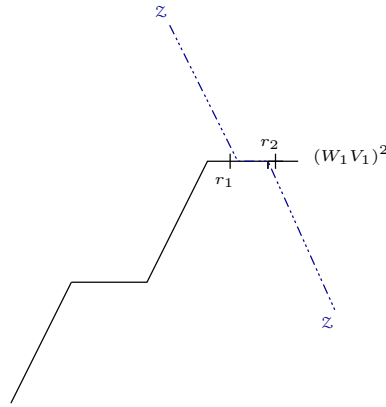
En las figuras siguientes se representan las palabras \mathcal{V} , \mathcal{W} , \mathcal{Z} en de la siguiente forma, sean V_1 y W_1 los representantes lineales de \mathcal{V} y \mathcal{W} definidos anteriormente y sea V_1W_1 un representante lineal de $\gamma(P, Q)$. Entonces dichos representantes se dibujan como líneas, la palabra $(V_1W_1)^i$ se representa como una escalera, donde V_1 es el segmento horizontal y W_1 es el segmento inclinado, dichos segmentos se unen en los puntos q_2 y p_2 . La línea que representa a Z (un representante lineal de \mathcal{Z}) corta a $(V_1W_1)^i$ en el par ligado (R, S) . También en las figuras se representan las palabras V_1^j y W_1^k que cortan a $(V_1W_1)^i$ en los pares (P_1, Q_1) y (P_2, Q_2) .

LEMA 2.8. Sean \mathcal{V}, \mathcal{W} y \mathcal{Z} palabras cíclicas tales que $l(\mathcal{Z}) \leq l(\mathcal{V}) \leq l(\mathcal{W})$. Sean $(P, Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ y $(R, S) \in \mathbb{LP}_2(\gamma(P, Q), \mathcal{Z})$. Entonces existe un par ligado $(T, U) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z})$ o $(T, U) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{Z})$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $r_2 \in V_1$, la demostración del caso $r_2 \in W_1$ se encuentra en el Apéndice C.

Como Y es una subpalabra de alguna potencia de \mathcal{Z} y de alguna potencia de $\gamma(P, Q)$, aplicando el lema 2.3 tenemos que $l(Y) < l(\mathcal{V}) + l(\mathcal{W}) + l(\mathcal{Z})$.

Primero observemos que si $r_1 \in V_1$, siendo V_1 la misma ocurrencia que a la que r_2 pertenece tenemos que $(R, S) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{Z})$. Entonces en este caso tomamos $T = R$ y $U = S$.



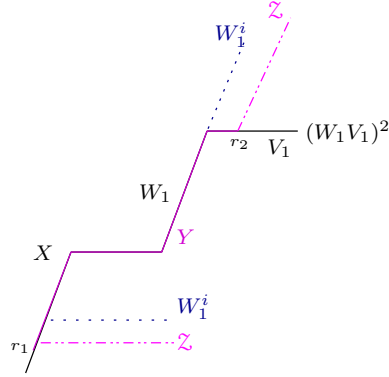
Consideremos ahora el caso en que $r_1 \notin V_1$, siendo V_1 la ocurrencia a la cual pertenece r_2 . Esto quiere decir que la palabra Y pasa por W_1 . Consideremos también la ocurrencia XW_1 siendo W_1 la ocurrencia que termina inmediatamente antes de la ocurrencia V_1 , donde $r_2 \in V_1$.

Dividamos la demostración en dos casos.

a) Supongamos que $XW_1 \subset Y$

Como XW_1 es una subpalabra de Y tenemos que $P_1 = p_1XW_1p_2$ es una subpalabra de un representante lineal de \mathcal{Z}^i y $Q_1 = q_1XW_1q_2$ es una subpalabra de un

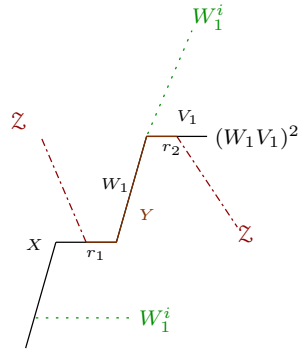
representante lineal de \mathcal{W}^j . Por la proposición 2.6 tenemos que (P_1, Q_1) es un par ligado. Entonces es $(P_1, Q_1) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{Z}, \mathcal{W})$.



En este caso es $T = Q_1$ y $U = P_1$.

b) Supongamos ahora que $XW_1 \not\subset Y$.

1) Sean $sg(P, Q) \neq sg(R, S)$ y $r_1 \in X$. Veamos que en es caso $r_1 \in V_1$.

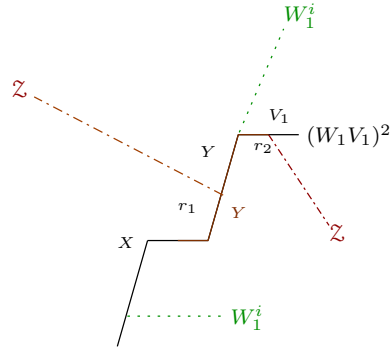


En esta situación podemos construir la subpalabra $R_1 = r_1X_1W_1q_2$ de una potencia de W_1 y la subpalabra $S_1 = s_1X_1W_1p_2$ de una potencia de V_1 , donde $X = X_2r_1X_1$. Es claro que forman un par ligado porque $o(c(\bar{p}_1\bar{q}_1x_1)) \neq o(c(\bar{r}_1\bar{s}_1y_1))$, entonces es $o(c(\bar{r}_1\bar{s}_1y_1)) = o(c(q_2p_2\bar{x}_2))$.

Aplicando el lema 2.3 es $l(X_1W_1) < l(Z) + l(W_1)$. Entonces es $l(X_1) < l(Z) < l(V)$. Luego es $X_1 \subset V_1$. Por lo tanto es $r_1 \in V_1$.

Finalmente tenemos que $(R_1, S_1) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z})$. Entonces son $T = R_1$ y $U = S_1$.

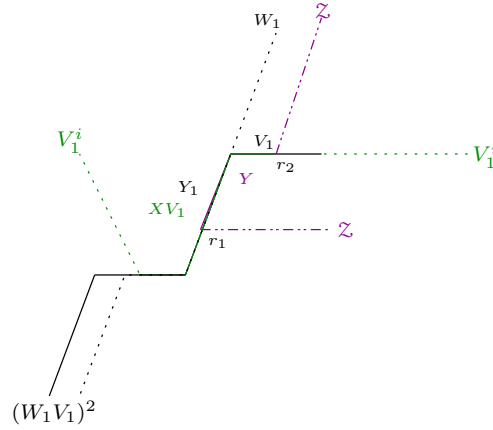
2) Sean $sg(P, Q) \neq sg(R, S)$ y $r_1 \in W_1$. En este caso podemos construir un par ligado $(R_1, S_1) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z})$.



Donde $R_1 = r_1X_2q_2$ y $S_1 = r_1X_2p_2$, siendo $W_1 = q_2X_1r_1X_2$. Entonces son $T = R_1$ y $U = S_1$.

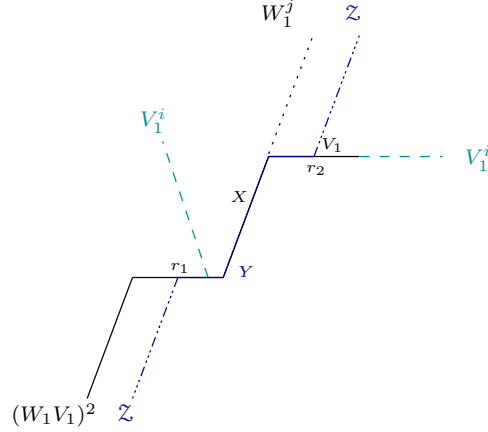
Veamos ahora el caso en que los signos de los pares ligados sean iguales. En este caso no podemos encontrar un par ligado entre \mathcal{W} y \mathcal{Z} . Entonces lo que haremos será construir un par ligado entre \mathcal{V} y \mathcal{Z} . Aplicando la proposición 2.6 sabemos que existe $(P_2, Q_2) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \gamma(P, Q))$ donde $P_2 = p_1XV_1p_2$ y $Q_2 = q_1XV_1q_2$. Ahora consideremos la ocurrencia P_2 donde XV_1 es la ocurrencia en la que X y W_1 terminan juntos. A partir de esta consideración, estudiemos dos casos posibles, que $r_1 \in XV_1$ y que $r_1 \notin XV_1$.

3) Sean $sg(P, Q) = sg(R, S)$ y $r_1 \in XV_1$. En este caso podemos construir un par ligado $(R_2, S_2) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{Z})$.



Como $r_1 \in XV_1$ tenemos que $R = r_1Yr_2 = r_1Y_1p_2Br_2$. Donde $r_1Y_1p_2Br_2 \subset \mathcal{V}^i$. Entonces es $R \subset \mathcal{V}^i$. Luego tenemos que $(R, S) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{Z})$. En este caso es $T = R$ y $U = S$.

4) Sean $sg(P, Q) = sg(R, S)$ y $r_1 \notin XV_1$. En este caso podemos construir el par ligado (P_1, Q_1) , donde $P_1 = p_1Xp_2Br_2$ y $Q_1 = q_1Xp_2Bs_2$.



Dado que $(P, Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ existe, aplicando la proposición 2.6, $(P_2, Q_2) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \gamma(P, Q))$, donde $P_2 = p_1 X V_1 p_2$ y $Q_2 = q_1 X V_1 q_2$.

Como $r_1 \notin X V_1$ se verifica que $p_1 X p_2 B r_2 \subset P_2$ entonces es $P_1 \subset \mathcal{V}^l$. Por otro lado tenemos que $R = r_1 Y r_2 = r_1 Y_1 p_2 B r_2 = r_1 F_1 q_1 X p_2 B r_2$ porque $r_1 \notin X V_1$, entonces es $Q_1 \subset \mathcal{Z}^j$. Finalmente tenemos que $(P_1, Q_1) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{Z})$. Luego son $T = P_1$ y $U = Q_1$.



LEMA 2.9. *En las mismas hipótesis del lema 2.8 tenemos que:*

- i) *si existe $(T, U) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z})$ entonces existe $(T', U') \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \gamma(T, U))$ tal que*

$$\gamma_{(T,U)}(T', U') = \gamma_{(P,Q)}(S, R) \quad y$$

$$[\mathcal{V}, [\mathcal{W}, \mathcal{Z}]_{(T,U)}]_{(T',U')} = -[\mathcal{Z}, [\mathcal{V}, \mathcal{W}]_{(P,Q)}]_{(S,R)};$$

- ii) *si existe $(T, U) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{Z})$ entonces existe $(T', U') \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{W}, \gamma(T, U))$ tal que*

$$\gamma_{(T,U)}(T', U') = \gamma_{(P,Q)}(S, R) \quad y$$

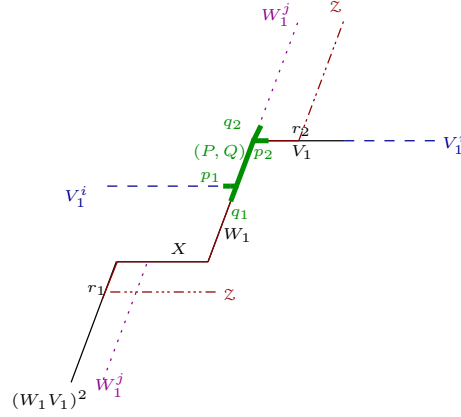
$$[\mathcal{W}, [\mathcal{Z}, \mathcal{V}]_{(U,T)}]_{(T',U')} = -[\mathcal{Z}, [\mathcal{V}, \mathcal{W}]_{(P,Q)}]_{(S,R)}.$$

Dados $(P, Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ y $(R, S) \in \mathbb{LP}_2(\gamma(P, Q), \mathcal{Z})$, estos determinan un sumando de $[\mathcal{Z}, [\mathcal{V}, \mathcal{W}]]$ el cual es $sg(P, Q)sg(S, R)\gamma_{(P,Q)}(S, R)$. A este sumando lo denotamos como $[\mathcal{Z}, [\mathcal{V}, \mathcal{W}]_{(P,Q)}]_{(S,R)}$.

DEMOSTRACIÓN. Primero calculemos $\gamma_{(P,Q)}(S, R)$. Como $(P, Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ se define $\gamma(P, Q) = c(V_1 W_1)$, donde V_1 y W_1 son representantes lineales de \mathcal{V} y \mathcal{W} que comienzan en p_2 y q_2 respectivamente. Por otro lado como $(S, R) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{Z}, \gamma(P, Q))$ es $\gamma_{(P,Q)}(S, R) = c(Z_2(V_1 W_1)_2)$, siendo Z_2 un representante lineal de \mathcal{Z} que comienza en s_2 y $(V_1 W_1)_2$ un representante lineal de $\gamma(P, Q)$ que comienza en r_2 .

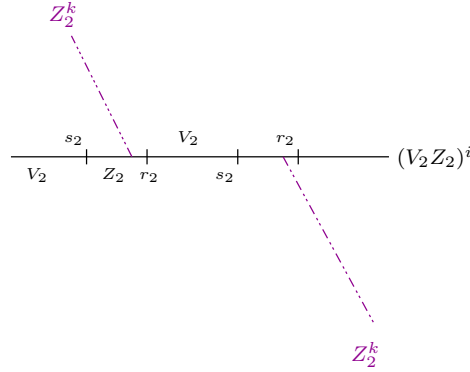
Si escribimos $Z_2 = s_2 C p_2 B$, tenemos que $(V_1 W_1)_2 = r_2 A W_1 p_2 B$. Entonces $\gamma_{(P,Q)}(S, R) = c(r_2 A W_1 p_2 B Z_2) = c(r_2 A W_1 p_2 B s_2 C p_2 B) = c(p_2 B r_2 A W_1 p_2 B s_2 C) = c(V_1 W_1 Z_1)$. Finalmente tenemos que $\gamma_{(P,Q)}(S, R) = c(V_1 W_1 Z_1)$.

Si escribimos $p_2 B = Z_1^i p_2 B_1$ tenemos que $Z_1 = p_2 B_1 s_2 C$, entonces $Z_2 = s_2 C p_2 B_1$. Luego



En este caso tenemos que $P_1 = p_1 X p_2 B r_2$ es una subpalabra de alguna potencia de \mathcal{V} , porque $V_1 = p_2 A r_2 B$ y por la proposición 2.6 es $p_1 X V_1 p_2$ una subpalabra de alguna potencia de \mathcal{V} y $P_1 \subset p_1 X V_1 p_2$, luego es P_1 una subpalabra de alguna potencia de \mathcal{V} . Además $Q_1 = q_1 X p_2 B s_2$ es una subpalabra de alguna potencia de \mathcal{Z} porque $X W_1 \subset Y$ entonces $X W_1 = C q_1 X$ y $Y = D q_1 X p_2 B$, luego $Q_1 = q_1 X p_2 B s_2 \subset \mathcal{Z}$. Entonces $(P_1, Q_1) \in \mathbb{L}\mathbb{P}_2(\mathcal{V}, \mathcal{Z})$, es par ligado porque (P, Q) y (R, S) tienen el mismo signo. Aplicando la proposición 2.6 es $(P_2, Q_2) \in \mathbb{L}\mathbb{P}_2(\gamma(P_1, Q_1), \mathcal{Z})$, siendo $P_2 = p_1 X p_2 B Z_2 r_2$ y $S_2 = q_1 X p_2 B Z_2 s_2$.

Como $P \subset P_2$ tenemos que $(P, Q) \in \mathbb{L}\mathbb{P}_2(\gamma(P_1, Q_1), \mathcal{W})$ ya que forman un par ligado y Q es una subpalabra de alguna potencia de \mathcal{W} . Entonces en este caso son $T = P_1$, $U = Q_1$, $T' = P$ y $U' = Q$. Calculemos ahora $\gamma_{(T,U)}(T', U')$.

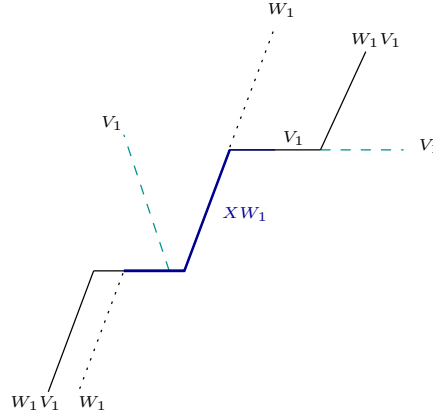


Tenemos que $V_2 = r_2 A p_2 B$ y $Z_2 = s_2 C p_2 B$, entonces es $V_2 Z_2 = r_2 A p_2 B s_2 C p_2 B$, entonces tenemos que $P = p_1 X p_2$ con $p_2 \in V_2$. Luego es $(V_2 Z_2)_1 = p_2 B s_2 C p_2 B r_2 A = Z_1 V_1$. Entonces es $\gamma_{(T,U)}(T', U') = c((V_2 Z_2)_1 W_1) = c(Z_1 V_1 W_1) = c(V_1 W_1 Z_1)$. Calculemos ahora $[\mathcal{W}, [\mathcal{Z}, \mathcal{V}]_{(U,T)}]_{(U',T')}$

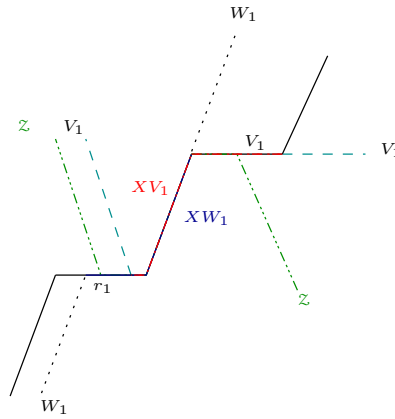
$$\begin{aligned}
 [\mathcal{W}, [\mathcal{Z}, \mathcal{V}]_{(U,T)}]_{(U',T')} &= sg(U', T') sg(U, T) \gamma_{(U,T)}(U', T') \\
 &= sg(Q, P) sg(Q, P) \gamma_{(U,T)}(U', T') \\
 &= \gamma_{(P,Q)}(S, R) \\
 &= -[\mathcal{Z}, [\mathcal{V}, \mathcal{W}]_{(P,Q)}]_{(S,R)}.
 \end{aligned}$$

b) Ahora estudiemos el caso $XW_1 \notin Y$.

i) Sea $sg(P, Q) \neq sg(R, S)$. En estas condiciones aplicando los casos (1) o (2) de b) en la demostración del lema 2.8 tenemos que existe $(T, U) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z})$ donde $T = r_1X_2q_2$ y $U = s_1X_2p_2$. Entonces lo que buscamos es encontrar un par $(T', U') \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \gamma(T, U))$. Aplicando la proposición 2.6 sabemos que existe $(P_2, Q_2) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \gamma(P, Q))$ donde $P_2 = p_1XV_1p_2$ y $Q_2 = q_1XV_1q_2$. Si observamos en la figura siguiente tenemos representada la palabra XW_1 .



Consideremos ahora la ocurrencia XV_1 donde las palabras X y W_1 terminan juntas. Ahora en esta situación podemos hacer una discusión respecto a la posición de r_1 en relación a la palabra XV_1 . Ver la siguiente figura.



A continuación veremos como construir el par ligado dependiendo de la posición de r_1 respecto a XV_1 .

- Si $r_1 \notin XV_1$ podemos escribir $Y = Y_1q_1Xp_2B$.

Sea $(T, U) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z})$ (el del lema 2.8) donde $T = r_1X_2q_2$ y $U = s_1X_2p_2$. Aplicando la proposición 2.6 tenemos que $(R_2, S_2) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{W}, \gamma(T, U))$, donde $R_2 = r_1X_2W_1q_2$ y $S_2 = s_1X_2W_1p_2$.

Por otro lado $\gamma_{(S,R)}(T, U) = c(W_1(Z_2V_2)_1)$.

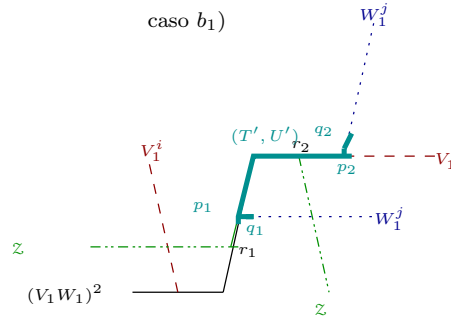
a) Si $p_2B = Z_1^i p_2 B_1$ tenemos que $(Z_2V_2)_1 = p_2 B Z_2 r_2 A = Z_1^i p_2 B_1 s_2 C p_2 B_1 r_2 A = Z_1 p_2 B r_2 A = Z_1 V_1$. Entonces $c(W_1(Z_2V_2)_1) = c(W_1 Z_1 V_1)$. Luego son en este caso son $T = R$, $U = S$, $T' = r_1 X_2 q_2$ y $U' = s_1 X_2 p_2$. Ver la figura de arriba.

Calculemos ahora $[\mathcal{W}, [\mathcal{Z}, \mathcal{V}]_{(U,T)}]_{(T',U')}$.

$$\begin{aligned} [\mathcal{W}, [\mathcal{Z}, \mathcal{V}]_{(U,T)}]_{(T',U')} &= sg(T', U') sg(U, T) \gamma_{(S,R)}(T', U') \\ &= -sg(R, S) sg(R, S) \gamma_{(S,R)}(T', U') \\ &= -\gamma_{(P,Q)}(S, R) \\ &= -[\mathcal{Z}, [\mathcal{V}, \mathcal{W}]_{(P,Q)}]_{(S,R)}. \end{aligned}$$

b) Si $Z_1 = p_2 B s_2 C$ el par ligado encontrado en el caso anterior no verifica la condición $\gamma_{(P,Q)}(S, R) = \gamma_{(T,U)}(T', U')$. Dividamos esta situación en dos casos posibles.

b₁) Si $X_2 = F p_1 G$ se verifica que $(Q, P) \in \mathbb{L}\mathbb{P}_2(\mathcal{W}, \gamma(S, R))$.



Por lo visto anteriormente, en estas hipótesis tenemos que $(R, S) \in \mathbb{L}\mathbb{P}_2(\mathcal{V}, \mathcal{Z})$. Entonces aplicando la proposición 2.6 tenemos que $(R_2, S_2) \in \mathbb{L}\mathbb{P}_2(\mathcal{V}, \gamma(R, S))$, donde $S_2 = s_1 Y V_2 s_2$.

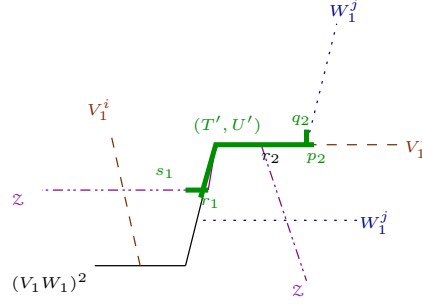
Como $V_2 = r_2 A p_2 B$ es $S_2 = s_1 Y r_2 A p_2 B s_2 = s_1 X_2 p_2 B r_2 A p_2 B s_2 = s_1 X_2 V_1 p_2 B s_2 = s_1 F p_1 G V_1 p_2 B s_2 = s_1 F p_1 X p_2 B s_2$. Luego $P \subset S_2$, entonces es $(Q, P) \in \mathbb{L}\mathbb{P}_2(\mathcal{W}, \gamma(S, R))$. En este caso son $T = R$, $U = S$, $T' = Q$ y $U' = P$. Además $\gamma_{(S,R)}(Q, P) = c(W_1(Z_2V_2)_1)$.

Como $S_2 = s_1 F P B s_2$ tenemos que $p_2 \in V_2$, entonces $(Z_2V_2)_1 = (Z_2 r_2 A p_2 B)_1 = p_2 B s_2 C p_2 B r_2 A = Z_1 V_1$. Luego es $\gamma_{(S,R)}(Q, P) = c(W_1 Z_1 V_1)$.

Calculemos ahora $[\mathcal{W}, [\mathcal{Z}, \mathcal{V}]_{(U,T)}]_{(T',U')}$.

$$\begin{aligned} [\mathcal{W}, [\mathcal{Z}, \mathcal{V}]_{(U,T)}]_{(T',U')} &= sg(T', U') sg(U, T) \gamma_{(U,T)}(T', U') \\ &= sg(Q, P) sg(S, R) \gamma_{(S,R)}(T', U') \\ &= -\gamma_{(P,Q)}(S, R) \\ &= -[\mathcal{Z}, [\mathcal{V}, \mathcal{W}]_{(P,Q)}]_{(S,R)}. \end{aligned}$$

b₂) Si $X_2 \subset X$ podemos escribir $Q = q_1 X q_2 = q_1 K r_1 Y r_2 A q_2$.

caso b_2)

Entonces podemos considerar el par ligado (R_1, S_1) donde $R_1 = r_1 Y r_2 A q_2$ y $S_1 = s_1 Y r_2 A p_2$, que forman un par ligado porque $sg(P, Q) \neq sg(R, S)$.

Como $(R, S) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{Z})$, aplicando la proposición 2.6 tenemos que $(R_2, S_2) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \gamma(R, S))$ donde $S_2 = s_1 Y V_2 s_2 = s_1 Y r_2 A p_2 B s_2$, entonces $S_1 \subset S_2$.

Luego S_1 es una subpalabra de una potencia de $\gamma(S, R)$. Entonces es $(R_1, S_1) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{W}, \gamma(S, R))$.

Además $\gamma_{(S,R)}(R_1, S_1) = c(W_1(Z_2 V_2)_1) = c(W_1 Z_1 V_1)$.

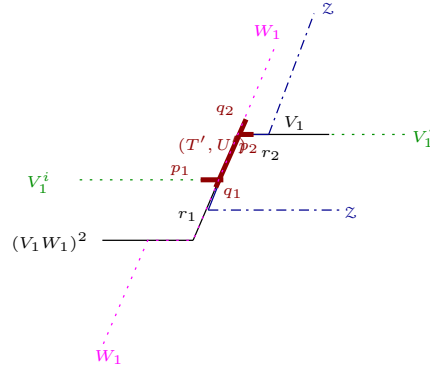
En este caso tenemos que $T = R$, $U = S$, $T' = R_1$ y $U' = S_1$. Entonces $\gamma_{(P,Q)}(S, R) = \gamma_{(U,T)}(T', U')$.

Calculemos ahora $[\mathcal{W}, [\mathcal{Z}, \mathcal{V}]_{(U,T)}]_{(T',U')}$.

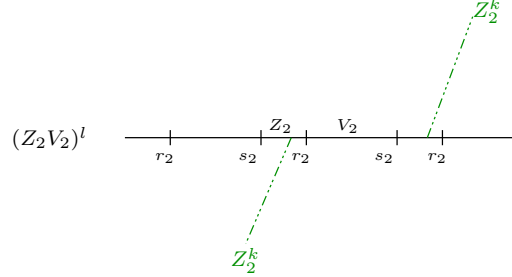
$$\begin{aligned} [\mathcal{W}, [\mathcal{Z}, \mathcal{V}]_{(U,T)}]_{(T',U')} &= sg(U, T) sg(T', U') \gamma_{(U,T)}(T', U') \\ &= -sg(R, S) sg(R, S) \gamma_{(U,T)}(T', U') \\ &= -\gamma_{(P,Q)}(R, S) \\ &= -[\mathcal{Z}, [\mathcal{V}, \mathcal{W}]_{(P,Q)}]_{(S,R)}. \end{aligned}$$

ii) Estudiemos ahora el caso $sg(P, Q) = sg(R, S)$. Realizaremos la misma discusión que en la demostración del lema 2.8 con estas mismas hipótesis. Seguimos representando las palabras XW_1 y XV_1 igual que el caso *i*).

• Si $r_1 \notin XV_1$, aplicando el lema 2.8 tenemos que existe $(T, U) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{Z})$ donde $T = p_1 X p_2 B r_2$ y $U = q_1 X p_2 B s_2$.



Luego aplicando la proposición 2.6 es $(P_2, Q_2) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \gamma(T, U))$ siendo $P_2 = p_1 X p_2 B V_2 r_2$ y $Q_2 = q_1 X p_2 B V_2 s_2$ y $(P_3, Q_3) \in \mathbb{LP}_2(\gamma(T, U), \mathcal{Z})$ donde $P_3 = p_1 X p_2 B Z_2 r_2$ y $Q_3 = q_1 X p_2 B Z_2 s_2$.



Entonces tenemos que $P \subset P_3$, luego es P una subpalabra de una potencia de $\gamma(T, U)$. Entonces es $(Q, P) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{W}, \gamma(T, U))$. En este caso tenemos que $T' = Q$ y $U' = P$.

Como $p_2 \in V_2$ tenemos que $\gamma_{(U,T)}(T', U') = c(W_1(Z_2 V_2)_1)$.

a) Si $Z_2 = s_2 C p_2 B$ es $(Z_2 V_2)_1 = p_2 B Z_2 r_2 A = Z_1 V_1$. Entonces $\gamma_{(U,T)}(T', U') = c(W_1 Z_1 V_1)$.

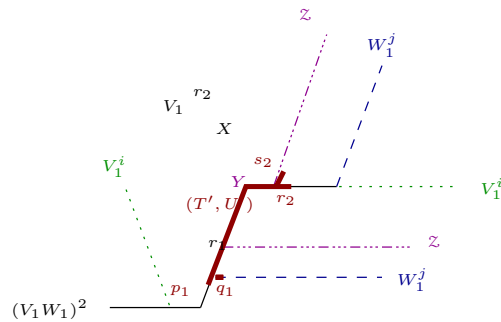
b) Si $p_2 B = Z_1^i p_2 B_1$, con $Z_1 = p_2 B_1 s_2 C$. Entonces es $(Z_2 V_2)_1 = p_2 B s_2 C p_2 b_1 r_2 A = Z_1 p_2 B r_2 A = Z_1 V_1$. Luego es $\gamma_{(U,T)}(T', U') = c(W_1 Z_1 V_1)$.

Calculemos ahora $[\mathcal{W}, [\mathcal{Z}, \mathcal{V}]_{(U,T)}]_{(T',U')}$.

$$\begin{aligned} [\mathcal{W}, [\mathcal{Z}, \mathcal{V}]_{(U,T)}]_{(T',U')} &= sg(T', U') sg(U, T) \gamma_{(T,U)}(T', U') \\ &= sg(Q, P) sg(Q, P) \gamma_{(T,U)}(T', U') \\ &= \gamma_{(P,Q)}(S, R) \\ &= -[\mathcal{Z}, [\mathcal{V}, \mathcal{W}]_{(P,Q)}]_{(S,R)}. \end{aligned}$$

• Si $r_1 \in X V_1$. Es necesario dividir este caso en dos subcasos porque los pares ligados que hallaremos serán diferentes en cada caso.

a) Si $Y \subset X$, tenemos que $(R, S) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z})$ porque en estas condiciones R es una subpalabra de alguna potencia de \mathcal{W} .



Aplicando la proposición 2.6 tenemos que $(R_1, S_1) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{W}, \gamma(R, S))$ donde $R_1 = r_1 Y W_2 r_2$ y $S_1 = s_1 Y W_2 s_2$ y que $(R_2, S_2) \in \mathbb{LP}_2(\gamma(R, S), \mathcal{Z})$ donde $R_2 = r_1 Y Z_2 r_2$ y $S_2 = s_1 Y Z_2 s_2$.

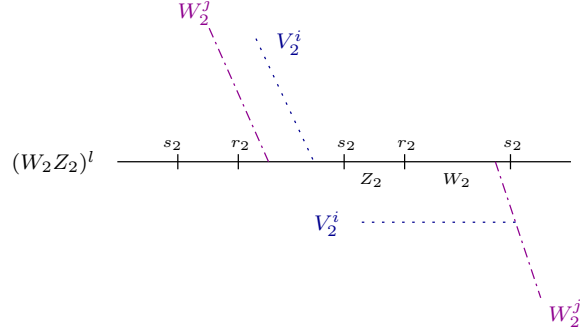
Consideremos el par ligado (P_1, Q_1) donde $P_1 = p_1 X_1 Y r_2$ y $Q_1 = q_1 X_1 Y s_2$ siendo

X_1 tal que $X = X_1 Y r_2 A$. Como $X_1 Y r_2 \subset X$ tenemos que P_1 es una supalabra de alguna potencia de \mathcal{V} .

En este caso tenemos que $W_1 = q_2 H r_2 A$, entonces $W_2 = r_2 A q_2 H$.

Además tenemos que $l(q_1 X_1 Y) = l(q_1 X_1) + l(Y) < l(Y) + l(W_2)$, entonces $q_1 X_1 Y \subset Y W_2$. Luego es $q_1 X_1 Y s_2 \subset S_1$.

Entonces tenemos que $(P_1, Q_1) \in \mathbb{L}\mathbb{P}_2(\mathcal{V}, \gamma(R, S))$. Luego en este caso son $T = R$, $U = S$, $T' = P_1$ y $U' = Q_1$.



Calculemos ahora $\gamma_{(T,U)}(T', U')$. Por definición $\gamma_{(T,U)}(T', U') = c(V_2(W_2 Z_2)_2) = c(V_2 Z_2 W_2)$.

Por un lado tenemos que $V_2 = r_2 A p_2 B$ y $W_2 = r_2 A q_2 H$.

Entonces si $Z_2 = s_2 C p_2 B$ tenemos que $V_2 Z_2 W_2 = r_2 A p_2 B s_2 C p_2 B r_2 A q_2 H = r_2 A Z_1 V_1 q_2 D$. Entonces $c(V_2 Z_2 W_2) = c(Z_1 V_1 W_1)$.

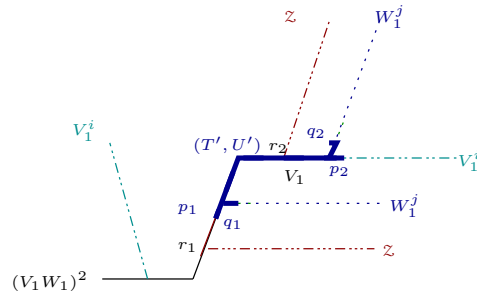
Si $p_2 B = Z_1^i p_2 B_1$, donde $Z_1 = p_2 B_1 s_2 C$, tenemos que realizando el mismo tipo de cuentas que $c(V_2 Z_2 W_2) = c(Z_1 V_1 W_1)$.

Entonces tenemos que $\gamma_{(T,U)}(T', U') = \gamma_{(P,Q)}(S, R)$.

Calculemos ahora $[\mathcal{V}, [\mathcal{W}, \mathcal{Z}]_{(T,U)}]_{(T',U')}$.

$$\begin{aligned} [\mathcal{V}, [\mathcal{W}, \mathcal{Z}]_{(T,U)}]_{(T',U')} &= sg(T, U) sg(T', U') \gamma_{(T,U)}(T', U') \\ &= sg(P, Q) sg(R, S) \gamma_{(T,U)}(T', S') \\ &= \gamma_{(P,Q)}(S, R) \\ &= -[\mathcal{Z}, [\mathcal{V}, \mathcal{W}]_{(P,Q)}]_{(S,R)}. \end{aligned}$$

b) Sea $Y \not\subset X$.



Tenemos que $(R, S) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{Z})$ porque dado que $r_1 \in XV_1$ y $Y \notin X$ es $XV_1 = X_1r_1Yr_2B$, entonces es R una subpalabra de \mathcal{V} . Aplicando la proposición 2.6 es $(R_1, S_1) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \gamma(R, S))$ donde $R_1 = r_1YV_2r_2$ y $S_1 = s_1YV_2s_2$.

Por otro lado tenemos que $YV_2 = Yr_2Ap_2B = Y_1p_1Y_2r_2Ap_2B = Y_1p_1Xp_2B$, entonces $P \subset YV_2$. Luego tenemos que $(Q, P) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{W}, \gamma(S, R))$. Entonces son $T = R$, $U = S$, $T' = Q$ y $U' = P$.

Como $YV_2 = Y_1p_1Xp_2B$ y $S_1 = s_1YV_2s_2$ es $p_2 \in V_2$, luego tenemos que $(Z_2V_2)_1 = p_2BZ_2r_2A = Z_1V_1$, por igual argumento que en casos anteriores. Entonces es $\gamma_{(U,T)}(T', U') = c(W_1(Z_2V_2)_1) = c(W_1Z_1V_1)$. Finalmente tenemos que $\gamma_{(U,T)}(T', U') = \gamma_{(P,Q)}(S, R)$.

Calculemos ahora $[\mathcal{W}, [\mathcal{Z}, \mathcal{V}]_{(U,T)}]_{(T',U')}$.

$$\begin{aligned} [\mathcal{W}, [\mathcal{Z}, \mathcal{V}]_{(U,T)}]_{(T',U')} &= sg(T', U')sg(U, T)\gamma_{(U,T)}(T', U') \\ &= sg(S, R)sg(Q, P)\gamma_{(U,T)}(T', U') \\ &= \gamma_{(P,Q)}(S, R) \\ &= -[\mathcal{Z}, [\mathcal{V}, \mathcal{W}]_{(P,Q)}]_{(S,R)}. \end{aligned}$$



TEOREMA 2.10. $(\mathbb{V}, [,]) es un álgebra de Lie.$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} [,] : \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{V} \\ [\mathcal{V}, \mathcal{W}] &= \sum_{(P,Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})} sg(P, Q)\gamma(P, Q). \end{aligned}$$

Probaremos el resultado para palabras cíclicas, luego por linealidad tendremos demostrado el resultado para cualquier elemento de \mathbb{V} .

1) Condición de antisimetría: $[,] \circ s = -[,]$.

$$\begin{aligned} [,] \circ s(\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}) &= [\mathcal{W}, \mathcal{V}] \\ &= \sum_{(P,Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{V})} sg(P, Q)\gamma(P, Q) \\ &= - \sum_{(Q,P) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})} sg(Q, P)\gamma(P, Q) \quad [\text{por el Lema 2.3}] \\ &= - \sum_{(Q,P) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})} sg(Q, P)\gamma(Q, P) \quad [\text{por el Lema 2.1}] \\ &= -[\mathcal{V}, \mathcal{W}]. \end{aligned}$$

2) Condición de Jacobi: $[\cdot, \cdot] \circ (id \otimes [\cdot, \cdot]) \circ (id + \varepsilon + \varepsilon^2) = 0$

Sean $\mathcal{Z}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ palabras cíclicas.

$$\begin{aligned} ([\cdot, \cdot] \circ (id \otimes [\cdot, \cdot]) \circ (id + \varepsilon + \varepsilon^2))(\mathcal{Z} \otimes \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}) &= ([\cdot, \cdot] \circ (id \otimes [\cdot, \cdot]))(\mathcal{Z} \otimes \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} + \mathcal{W} \otimes \mathcal{Z} \otimes \mathcal{V} \\ &\quad + \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \otimes \mathcal{Z}) \\ &= ([\cdot, \cdot])(\mathcal{Z} \otimes [\mathcal{V}, \mathcal{W}] + \mathcal{W} \otimes [\mathcal{Z}, \mathcal{V}] + \mathcal{V} \otimes [\mathcal{W}, \mathcal{Z}]) \\ &= [\mathcal{Z}, [\mathcal{V}, \mathcal{W}]] + [\mathcal{W}, [\mathcal{Z}, \mathcal{V}]] + [\mathcal{V}, [\mathcal{W}, \mathcal{Z}]] \end{aligned}$$

Hay que probar que $[\mathcal{Z}, [\mathcal{V}, \mathcal{W}]] + [\mathcal{W}, [\mathcal{Z}, \mathcal{V}]] + [\mathcal{V}, [\mathcal{W}, \mathcal{Z}]] = 0$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $l(\mathcal{Z}) \leq l(\mathcal{V}) \leq l(\mathcal{W})$.

$$\begin{aligned} [\mathcal{Z}, [\mathcal{V}, \mathcal{W}]] &= \sum_{(P,Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})} sg(P, Q)[\mathcal{Z}, \gamma(P, Q)] \\ &= \sum_{(P,Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})} \sum_{(R,S) \in \mathbb{LP}_2(\gamma(P, Q), \mathcal{Z})} sg(P, Q)sg(R, S)\gamma(R, S)_{\gamma(P, Q)}. \end{aligned}$$

Aplicando el lema 2.9 dados $(P, Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ y $(R, S) \in \mathbb{LP}_2(\gamma(P, Q), \mathcal{Z})$ existen $(T, U) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{Z})$ y $(T', U') \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{W}, \gamma(T, U))$ tales que

$$[\mathcal{W}, [\mathcal{Z}, \mathcal{V}]_{(U, T)}]_{(T', U')} = -[\mathcal{Z}, [\mathcal{V}, \mathcal{W}]_{(P, Q)}]_{(S, R)}$$

o existen $(T, U) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z})$ y $(T', U') \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \gamma(T, U))$ tales que

$$[\mathcal{V}, [\mathcal{W}, \mathcal{Z}]_{(T, U)}]_{(T', U')} = -[\mathcal{Z}, [\mathcal{V}, \mathcal{W}]_{(P, Q)}]_{(S, R)}.$$

Entonces para cada par $(P, Q) \in \mathbb{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ y $(R, S) \in \mathbb{LP}_2(\gamma(P, Q), \mathcal{Z})$, existe otro par de pares ligados en $[\mathcal{W}, [\mathcal{Z}, \mathcal{V}]]$ o $[\mathcal{V}, [\mathcal{W}, \mathcal{Z}]]$ opuesto. Entonces se verifica que $[\mathcal{Z}, [\mathcal{V}, \mathcal{W}]] + [\mathcal{W}, [\mathcal{Z}, \mathcal{V}]] + [\mathcal{V}, [\mathcal{W}, \mathcal{Z}]] = 0$

◻

Este teorema se probó para pares ligados de tipo (2). El resultado se cumple para pares ligados de cualquier tipo.

3. Isomorfismo

En el capítulo dos probamos que $(\mathbb{Z}\hat{\pi}, [\cdot, \cdot], \nu)$ es una biálgebra de Lie involutiva y en las secciones anteriores probamos que $(\mathbb{V}, [\cdot, \cdot])$ es un álgebra de Lie y (\mathbb{V}, δ) es una coálgebra de Lie.

NOTACIÓN: Para no generar confusión cambiamos la notación del corchete de curvas de $[\cdot, \cdot]$ a $|\cdot, \cdot|$.

Tenemos dos estructuras, $(\mathbb{Z}\hat{\pi}, |\cdot, \cdot|, \nu)$ y $(\mathbb{V}, [\cdot, \cdot], \delta)$. A continuación veremos que son isomorfas.

En el capítulo cuatro probamos que si M es una superficie compacta con borde con característica de Euler $1 - n$ podíamos asociarle un espacio \mathbb{V} . Además vimos que tenemos una correspondencia biyectiva entre \mathbb{V}_n y $\mathbb{Z}\hat{\pi}$, donde a una palabra \mathcal{W} le asociamos un

segmento representativo minimal α .

Por el teorema 2.3 tenemos que dados \mathcal{V} y α , existe una correspondencia uno a uno entre los puntos $p \in \#\alpha \cap I_\alpha$ y los pares de pares ligados $\{(P, Q), (Q, P)\} \subset \mathbb{L}\mathbb{P}_1(\mathcal{V})$ y por el teorema 3.3 tenemos que dadas dos palabras cíclicas \mathcal{V} , \mathcal{W} y α , β sus segmentos representativos minimales, existe una correspondencia uno a uno entre los puntos $p \in \alpha\#\beta$ y los pares ligados $(P, Q) \in \mathbb{L}\mathbb{P}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$.

TEOREMA 3.1. *La biyección entre \mathbb{V}_n y $\mathbb{Z}\hat{\pi}$ respeta las estructuras existentes en ellos.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos por $\eta : \mathbb{V}_n \rightarrow \mathbb{Z}\hat{\pi}$ la biyección dada por $\eta(\mathcal{V}) = \langle \alpha \rangle$ siendo α el segmento representativo minimal de \mathcal{V} .

Queremos probar que los siguientes diagramas conmutan.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}_n & \xrightarrow{\eta} & \mathbb{Z}\hat{\pi} \\ \delta \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbb{V}_n \otimes \mathbb{V}_n & \xrightarrow{\eta \otimes \eta} & \mathbb{Z}\hat{\pi} \otimes \mathbb{Z}\hat{\pi} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{V}_n \otimes \mathbb{V}_n & \xrightarrow{\eta \otimes \eta} & \mathbb{Z}\hat{\pi} \otimes \mathbb{Z}\hat{\pi} \\ \downarrow [\cdot, \cdot] & & \downarrow |\cdot| \\ \mathbb{V}_n & \xrightarrow{\eta} & \mathbb{Z}\hat{\pi} \end{array}$$

Veamos que el primer diagrama conmuta, el otro caso es análogo.

Sea \mathcal{X} palabra cíclica reducida primitiva. Sea α un segmento representativo de \mathcal{X} y sea S el conjunto de los puntos de intersección de α . Recordar que S es la unión disjunta de I_α y P_α , donde P_α es el conjunto de los intersección de A_{rm} con A_{km} para $k \in \{1, 2, \dots, r-1\}$.

Primero sea:

$$(\nu \circ \eta)(\mathcal{X}) = \nu(\langle \alpha \rangle) = \sum_{q \in \#\alpha} \{ \langle \alpha_q^1 \rangle \otimes \langle \alpha_q^2 \rangle - \langle \alpha_q^2 \rangle \otimes \langle \alpha_q^1 \rangle \}.$$

Por otro lado

$$\delta(\mathcal{X}) = \sum_{\{(P, Q), (Q, P)\} \subset \mathbb{L}\mathbb{P}_1(\mathcal{X})} sg(P, Q) \{ \delta_1(P, Q) \otimes \delta_2(P, Q) - \delta_2(P, Q) \otimes \delta_1(P, Q) \}.$$

Si nos restringimos a P_α tenemos que:

$$\sum_{q \in P_\alpha} \langle \alpha_q^1 \rangle \otimes \langle \alpha_q^2 \rangle - \langle \alpha_q^2 \rangle \otimes \langle \alpha_q^1 \rangle = \sum_{i=1}^{r-1} \pi(A_0 A_1 \dots A_i) \otimes \pi(A_{i+1} \dots A_{r-1}) - \pi(A_{i+1} \dots A_{r-1}) \otimes \pi(A_0 A_1 \dots A_i) = 0.$$

$$\text{Entonces } \nu(\langle \alpha \rangle) = \sum_{q \in I_\alpha} \langle \alpha_q^1 \rangle \otimes \langle \alpha_q^2 \rangle - \langle \alpha_q^2 \rangle \otimes \langle \alpha_q^1 \rangle.$$

Por el teorema 2.3 tenemos que I_α esta en correspondencia con los pares de pares ligados $\{(P, Q), (Q, P)\}$ de \mathcal{X} .

Consideremos $p \in I_\alpha$ y $\{(P, Q), (Q, P)\} \subset \mathbb{L}\mathbb{P}_1(\mathcal{X})$ el par de pares ligados que le corresponde.

Supongamos que $sg(P, Q) = 1$, entonces se verifica que $\langle \alpha_p^1 \rangle = \eta(\delta_1(P, Q))$ y $\langle \alpha_p^2 \rangle = \eta(\delta_2(P, Q))$.

Si $sg(P, Q) = -1$ entonces es $\langle \alpha_p^2 \rangle = \eta(\delta_2(P, Q))$ y $\langle \alpha_p^1 \rangle = \eta(\delta_1(P, Q))$.

Entonces es:

$$\begin{aligned}
 (\nu \circ \eta)(\mathcal{X}) &= \sum_{\{(P,Q),(Q,P)\} \subset \mathbb{LP}_1(\mathcal{X})} sg(P, Q) \{ \eta(\delta_1(P, Q)) \otimes \eta(\delta_2(P, Q)) - \eta(\delta_2(P, Q)) \otimes \eta(\delta_1(P, Q)) \} \\
 &= (\eta \otimes \eta)(\delta(\mathcal{X})).
 \end{aligned}$$



COROLARIO 3.2. $(\mathbb{V}_n, [,], \delta)$ es una biálgebra de Lie involutiva.

DEMOSTRACIÓN. Por lo probado en el teorema anterior la estructuras $(\mathbb{Z}\hat{\pi}, | , | , \nu)$ y $(\mathbb{V}_n, [,], \delta)$ son equivalentes. Además $(\mathbb{Z}\hat{\pi}, | , | , \nu)$ es una biálgebra de Lie involutiva por los teoremas 2.2 y 2.3 del capítulo tres. Entonces es $(\mathbb{V}_n, [,], \delta)$ es una biálgebra de Lie involutiva.



APÉNDICE A

1. Grupos libres

Sea X un conjunto arbitrario. Veamos como construir un grupo F libre sobre el conjunto X .

DEFINICIÓN 1.1. Sea F un objeto en una categoría \mathcal{C} , X un conjunto no vacío y $\iota : X \rightarrow F$ un mapa de conjuntos. Decimos que F es *libre sobre el conjunto X* si para todo objeto A de \mathcal{C} y todo mapa de conjuntos $f : X \rightarrow A$ existe un único morfismo de \mathcal{C} , $\bar{f} : F \rightarrow A$ tal que $\bar{f} \circ \iota = f$ (como mapas de conjuntos).

Sea \mathcal{C} la categoría de los grupos.

Si $X = \emptyset$, F es el grupo trivial $\langle e \rangle$.

Sea $X \neq \emptyset$, consideremos X^{-1} (también se utiliza la notación \bar{X}) un conjunto disjunto de X tal que $|X^{-1}| = |X|$. Escojamos una biyección $X \rightarrow X^{-1}$ y notemos la imagen de $x \in X$ por x^{-1} (o por \bar{x} con la otra notación).

Finalmente consideremos un conjunto disjunto con $X \cup X^{-1}$ que tiene exactamente un elemento, notemos a este elemento por 1.

DEFINICIÓN 1.2. Una *palabra* (o *palabra lineal*) en X es una sucesión (a_1, a_2, \dots) con $a_i \in X \cup X^{-1} \cup \{1\}$ tal que para algún $n \in \mathbb{N}^*$, $a_k = 1$ para todo $k \geq n$. La sucesión constante $(1, 1, 1, \dots)$ se llama *palabra vacía* y se nota or 1.

Una palabra en X se dice *reducida* si:

- i) para todo $x \in X$, x y x^{-1} no son adyacentes, es decir si $a_i = x$ entonces $a_{i+1} \neq x^{-1}$ y si $a_i = x^{-1}$ entonces $a_{i+1} \neq x$, para todo $i \in \mathbb{N}^*$, $x \in X$;
- ii) $a_k = 1$ implica que $a_i = 1$ para todo $i \geq k$.

Toda palabra reducida no vacía es de la forma $(x_1^{\lambda_1}, x_2^{\lambda_2}, \dots, x_n^{\lambda_n}, 1, \dots)$ donde $n \in \mathbb{N}^*$, $x_i \in X$ y $\lambda_i = \pm 1$ y por convención x^1 denota a x para todo $x \in X$.

De ahora en adelante notamos a las palabras (o palabras lineales) por $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$.

DEFINICIÓN 1.3. Dos palabras reducidas $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_m^{\lambda_m}$ y $y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_n^{\delta_n}$ ($x_i, y_i \in X$; $\lambda_i, \delta_j = \pm 1$) son *iguales* si y sólo si ambas son 1 o $m = n$ y $x_i = y_i$, $\lambda_i = \delta_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

DEFINICIÓN 1.4. Definimos $F := F(X)$ el conjunto de las palabras reducidas de X .

Podemos considerar el mapa inyectivo

$$\begin{aligned} X &\rightarrow F(X), \\ x &\mapsto x^1 \end{aligned}$$

entonces podemos identificar a X con su imagen y considerarlo como subconjunto de $F(X)$.

Finamente definimos un producto en F como

- (i) $1w = w1 = w$ para todo $w \in F$.
(ii) Si $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_m^{\lambda_m}$ y $y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_n^{\delta_n}$ son palabras reducidas no vacías en X con $m \leq n$.
Sea k el mayor entero $0 \leq k \leq m$ tal que $x_{m-j}^{\lambda_{m-j}} = y_{j+1}^{-\delta_{j+1}}$ para $j = 0, 1, \dots, k-1$.
Entonces definimos

$$(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_m^{\lambda_m})(y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_n^{\delta_n}) = \begin{cases} x_1^{\lambda_1} \dots x_{m-k}^{\lambda_{m-k}} y_{k+1}^{\delta_{k+1}} \dots y_n^{\delta_n} & \text{si } k < m; \\ y_{m+1}^{\delta_{m+1}} \dots y_n^{\delta_n} & \text{si } k = m < n; \\ 1 & \text{si } k = m = n. \end{cases}$$

Si $m > n$ el producto se define de forma análoga.

TEOREMA 1.1. *Si X es un conjunto no vacío, entonces F es un grupo y $F = \langle X \rangle$.*

DEMOSTRACIÓN. Como 1 es el elemento unidad y $x_1^{\delta_1} \dots x_n^{\delta_n}$ tiene como inversa $x_n^{-\delta_n} \dots x_1^{-\delta_1}$, solo tenemos que probar la asociatividad del producto.

Para cada $x \in X$ y $\delta = \pm 1$ definimos el mapa $|x^\delta| : F \rightarrow F$ como

$$\begin{aligned} |x^\delta|(1) &= x^\delta \\ |x^\delta|(x_1^{\delta_1} \dots x_n^{\delta_n}) &= \begin{cases} x^\delta x_1^{\delta_1} \dots x_n^{\delta_n} & \text{si } x^\delta \neq x_1^{-\delta_1}; \\ x_2^{\delta_2} \dots x_n^{\delta_n} & \text{si } x^\delta = x_1^{-\delta_1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Como $|x||x^{-1}| = 1_F = |x^{-1}||x|$, todo $|x^\delta|$ es una biyección de F con inversa $|x^{-\delta}|$.

Sea $A(F)$ el grupo de todas las biyecciones de F y F_0 es el subgrupo generado por $\{|x| : x \in X\}$.

Consideremos el mapa

$$\begin{aligned} \varphi : F &\rightarrow F_0 \\ 1 &\mapsto 1_F \\ x_1^{\delta_1} \dots x_n^{\delta_n} &\mapsto |x_1^{\delta_1}| \dots |x_n^{\delta_n}| \end{aligned}$$

Es fácil ver que φ es biyectivo y verifica $\varphi(w_1 w_2) = \varphi(w_1) \varphi(w_2)$ para todo $w_1, w_2 \in F$. Como F_0 es un grupo se deduce que el producto en F es asociativo.



Esto termina de probar que F es libre sobre X . A F se lo llama *grupo libre sobre el conjunto X* .

NOTACIÓN: Si $V = x_1^{\delta_1} \dots x_n^{\delta_n}$ es una palabra lineal de F entonces notamos a su palabra inversa por $\bar{V} = x_n^{-\delta_n} \dots x_1^{-\delta_1}$.

2. Grupo fundamental y topología diferencial

DEFINICIÓN 2.1. Sea X un espacio topológico. Definimos el conjunto de caminos de x_0 a x_1 en X como

$$\mathcal{C}_{x_0, x_1} = \{f : I \rightarrow X \text{ continua} : f(0) = x_0, f(1) = x_1\}$$

DEFINICIÓN 2.2. Definimos una relación de equivalencia en \mathcal{C}_{x_0, x_1} de la siguiente manera: sean $f, g \in \mathcal{C}_{x_0, x_1}$, entonces $f \sim g$ si existe una homotopía de caminos entre f y g . Es decir si existe un mapa continuo $F : I \times I \rightarrow X$ tal que:

- $F(s, 0) = f(s)$ y $F(s, 1) = g(s)$ para todo $s \in I$,
- $F(0, t) = x_0$ y $F(1, t) = x_1$ para todo $t \in I$.

Definimos el grupo fundamental de X con punto base x_0 como

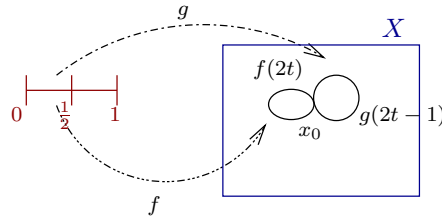
$$\pi_1(X, x_0) = \mathcal{C}_{x_0, x_0} / \sim.$$

PROPOSICIÓN 2.1. Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Entonces $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo donde el producto esta dado por

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(X, x_0) \\ ([f], [g]) &\mapsto [f \cdot g] \end{aligned}$$

donde

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



PROPOSICIÓN 2.2. Sea X un espacio topológico y sea $\beta \in \mathcal{C}_{x_0, x_1}$, entonces β induce un isomorfismo de grupos

$$h_\beta : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$$

dado por

$$h_\beta([f]) = [\beta f \beta^{-1}].$$

COROLARIO 2.3. Si X es un espacio topológico conexo por caminos entonces $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ para todo $x_0, x_1 \in X$.

DEFINICIÓN 2.3. En las hipótesis del corolario 2.3 definimos el grupo fundamental de X , como $\pi_1(X) = \pi_1(X, x_0)$ para algún $x_0 \in X$ y el conjunto de las clases de homotopía libre de X como $\hat{\pi}_1(X) := \pi_1(X) / \sim$, donde $[f] \sim [g]$ si existe una curva β tal que $[g] = [\beta f \beta^{-1}]$.

A continuación daremos una serie de resultados de topología diferencial, donde no se presentan las demostraciones de los mismos.

DEFINICIÓN 2.4. Sean X, Y espacios topológicos arbitrarios.

El espacio $C_S(X, Y)$ es el conjunto $C(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y : f \text{ es continua}\}$ con la *topología fuerte*, es decir:

Si $f \in C(X, Y)$, sea $\Gamma_f \subset X \times Y$ el gráfico del mapa f . Si $W \subset X \times Y$ es un conjunto abierto que contiene a Γ_f definimos

$$\mathcal{N}(f, W) := \{g \in C(X, Y) : \Gamma_g \subset W\}.$$

Estos conjuntos, para todo f y W , forman una base de la topología fuerte. La topología inducida en subconjuntos de $C(X, Y)$ es también llamada *topología fuerte*.

Cuando X es paracompacto e Y es un espacio métrico, $C_S(X, Y)$ tiene como base de la topología a los conjuntos

$$\mathcal{N}(f, \varepsilon) := \{g \in C(X, Y) : d(g(x), f(x)) < \varepsilon(x), \text{ para todo } x \in X\},$$

donde $f \in C(X, Y)$ y $\varepsilon \in C(X, \mathbb{R}^+)$ son arbitrarios.

DEFINICIÓN 2.5. Sea X un espacio topológico arbitrario.

El espacio $C_W(X, Y)$ es el conjunto $C(X, Y)$ con la *topología débil*, esta topología esta generada por los conjuntos

$$\mathcal{N}(K, V) := \{f \in C(X, Y) : f(K) \subset V\},$$

donde $K \subset X$ es compacto y $V \subset Y$ es abierto.

Cuando Y es un espacio métrico esta topología es la misma que la topología uniforme sobre conjuntos compactos. Si X es compacto e Y es métrico, $C_W(X, Y)$ tiene la métrica

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

OBSERVACIÓN 2.1. Si X es compacto entonces estas dos topologías coinciden.

TEOREMA 2.4. Si cada componente de X es localmente compacta con base numerable e Y es un espacio métrico completo entonces $C_W(X, Y)$ tiene una métrica completa.

TEOREMA 2.5. Sean M y N C^r -variedades y $1 \leq s \leq \infty$. Entonces $C^s(M, N)$ es denso en $C_S^r(M, N)$ donde $0 \leq r \leq s$.

DEFINICIÓN 2.6. Sean M, N variedades y $f : M \rightarrow N$ diferenciable.

- i) f es una *inmersión* si $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ es inyectivo para todo $x \in M$.
- ii) f es *propia* si $f^{-1}(K) \subset M$ es compacto para todo $K \subset N$ compacto.
- iii) f es un *encaje* si es una inmersión propia.

DEFINICIÓN 2.7. Sea $f : M \rightarrow N$ C^1 -mapa y $A \subset N$ subvariedad. Si $K \subset M$, decimos que f es *transversal* a A en K y notamos $f \overline{\pitchfork}_K A$ si para todo $x \in K$ y $f(x) = y \in A$ se cumple que

$$T_y N = df_x(T_x M) + T_y A.$$

Cuando $K = M$ se dice que f es *transversal* a A y notamos $f\overline{\cap}A$. Consideramos los conjuntos

$$\begin{aligned}\overline{\cap}_K^r(M, N; A) &:= \{f \in C^r(M, N) : f\overline{\cap}_K A\}, \\ \overline{\cap}^r(M, N; A) &:= \overline{\cap}_M^r(M, N; A).\end{aligned}$$

TEOREMA 2.6. *Si $f : M \rightarrow N$ es transversal a $A \subset N$ subvariedad, entonces $f^{-1}(A)$ es una subvariedad de M y $\text{codim}_M f^{-1}(A) = \text{codim}_N A$.*

DEFINICIÓN 2.8. Sea M una variedad y A, B subvariedades de M . Decimos que A y B están en *posición general* si la inclusión $B \hookrightarrow M$ es transversal a A .

DEFINICIÓN 2.9. Una inmersión $f : M \rightarrow N$ tiene puramente *puntos dobles transversales* si para todo par de puntos x, y distintos de M tales que $f(x) = f(y)$, existen U y V entornos de x e y respectivamente tales que $f|_U$ y $f|_V$ son encajes y las subvariedades $f(U)$ y $f(V)$ están en posición general.

NOTACIÓN: $\text{Inm}(M, N)_0 := \{f : M \rightarrow N : f \text{ inmersión solo con puntos dobles transversales}\}$.

TEOREMA 2.7. *Sean A, B C^r -subvariedades de M y $1 \leq r \leq \infty$. Entonces todo entorno de la inclusión $i_B : B \rightarrow M$ en $C_S^r(B, M)$ contiene un encaje que es transversal a A .*

TEOREMA 2.8. *$\text{Inm}(M, N)_0$ es un abierto denso en $\text{Inm}_S^r(M, N)$ donde $1 \leq r \leq \infty$.*

TEOREMA 2.9. *Sean M y N C^r -variedades y $1 \leq r \leq \infty$. Si $\dim N \geq 2\dim M$ se cumple que $\text{Inm}(M, N)$ es denso en $C_S^r(M, N)$.*

TEOREMA 2.10. *El conjunto $\text{Inm}^r(M, N)$ de C^r -inmersiones es abierto en $C_S^r(M, N)$, para todo $r \geq 1$.*

DEFINICIÓN 2.10. Un subconjunto de un espacio X es *residual* si contiene la intersección numerable de conjuntos abiertos densos.

TEOREMA 2.11 (TEOREMA DE TRANSVERSALIDAD). *Sean M, N variedades, $A \subset N$ subvariedad y $1 \leq r \leq \infty$. Entonces*

- (a) $\overline{\cap}^r(M, N; A)$ es residual (y por lo tanto denso) en $C^r(M, N)$ para ambas topologías.
- (b) Supongamos A cerrado en N . Si $L \subset M$ es cerrado (respectivamente compacto), $\overline{\cap}_L^r(M, N; A)$ es denso y abierto en $C_S^r(M, N)$ (respectivamente en $C_W^r(M, N)$).

Sea M es una variedad de dimensión 1 cerrada y S es una superficie orientada conexa.

COROLARIO 2.12. *$\text{Inm}(M, S)_0$ es un subconjunto abierto y denso de $\text{Inm}(M, S)$ y de $C^\infty(M, S)$.*

3. Métrica hiperbólica

En este apéndice daremos una serie de resultados sobre métricas hiperbólicas, sin demostración.

Un estudio más detallado sobre el tema se puede encontrar en [2].

DEFINICIÓN 3.1. Consideremos el semiespacio de \mathbb{R}^n dado por

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$$

y consideremos en él la métrica

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}.$$

\mathbb{H}^n con esta métrica tiene curvatura seccional constante igual a -1 y es completo. Dicho espacio se llama *espacio hiperbólico*.

OBSERVACIÓN 3.1. Sea \tilde{M} un espacio de cubrimiento de una variedad Riemanniana M . Entonces \tilde{M} admite una estructura Riemanniana tal que la aplicación de cubrimiento $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ es una isometría local. Esta métrica se llama **métrica de cubrimiento**. Además se cumple que \tilde{M} es completa si y sólo si M es completa.

TEOREMA 3.1. Sea M una variedad Riemanniana completa con curvatura seccional constante K . Entonces un cubrimiento universal \tilde{M} de M , con la métrica de cubrimiento, es isométrico a:

- a) \mathbb{H}^n , si $K = -1$,
- b) \mathbb{R}^n , si $K = 0$,
- c) S^n , si $K = 1$.

DEFINICIÓN 3.2. Sea M un espacio topológico, diremos que un grupo G (de homeomorfismos de M) actúa de modo totalmente discontinuo si todo $x \in M$ tiene un entorno U tal que $g(U) \cap U = \emptyset$, para todo $g \in G$, $g \neq e$.

En este caso, la proyección $\pi : M \rightarrow M/G$ (donde M/G tiene la topología cociente) es una aplicación de cubrimiento regular y G es el grupo de transformaciones de cubrimiento. La demostración de este resultado se puede encontrar en [9].

Supongamos que M es una variedad Riemanniana y sea Γ un subgrupo del grupo de isometrías de M que actúa de modo totalmente discontinuo. Se puede probar que M/Γ tiene una estructura de variedad diferenciable de modo que $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ es un difeomorfismo local. También podemos darle a M/Γ una métrica Riemanniana de modo que π sea una isometría local. Más específicamente, dado $p \in M/\Gamma$, escojemos $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$; para todo par $u, v \in T_{\tilde{p}}(M/\Gamma)$, definimos

$$\langle u, v \rangle = \langle d\pi^{-1}(u), d\pi^{-1}(v) \rangle_{\tilde{p}}.$$

Como el cubrimiento π es regular, Γ es transitivo en $\pi^{-1}(p)$ (ver [9]). Luego, dado cualquier $\tilde{q} \in \pi^{-1}(p)$, existe $\gamma \in \Gamma$ con $\gamma(\tilde{p}) = \tilde{q}$, con esto tenemos que la definición anterior

no depende de la elección de $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$. Es inmediato verificar que con esta métrica $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ es una isometría local; esta métrica se llama *métrica en M/Γ inducida por el cubrimiento π* . Observar que M/Γ es completa si y sólo si M es completa y que M/Γ tiene curvatura constante si y sólo si M tiene curvatura constante.

PROPOSICIÓN 3.2. *Sea M una variedad Riemanniana completa con curvatura seccional constante K $(1, 0, -1)$. Entonces M es isométrica a \tilde{M}/Γ , donde $\tilde{M} = S^n$ (si $K = 1$), \mathbb{R}^n (si $K = 0$) ó \mathbb{H}^n (si $K = -1$) donde Γ es un subgrupo del grupo de isometrías de \tilde{M} que actúa de modo totalmente discontinuo en \tilde{M} , y la métrica de \tilde{M}/Γ es la inducida por el cubrimiento $\pi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$.*

PROPOSICIÓN 3.3. *Toda superficie compacta, orientable de género $p > 1$ puede ser munida de una métrica de curvatura constante negativa.*

DEMOSTRACIÓN. Podemos tomar en el plano hiperbólico \mathbb{H}^2 un polígono geodésico cerrado \mathcal{P} con $4p$ lados con iguales longitudes. El polígono \mathcal{P} puede ser identificado con una variedad topológica bi-dimensional M^2 . (Ver [9]). Sea Γ el subgrupo de isometrías de \mathbb{H}^2 generado por las isometrías que identifican los lados de \mathcal{P} . Es posible mostrar que los transformados de \mathcal{P} por Γ “llena a \mathbb{H}^2 sin agujeros” si y sólo si la suma α de los ángulos internos de los vértices de \mathcal{P} es igual a 2π . En este caso, $M^2 = \mathbb{H}^2/\Gamma$ tiene una métrica de curvatura constante igual a -1 . Afirmando que es posible encontrar un polígono \mathcal{P} que satisface la condición $\alpha = 2\pi$, la demostración está completa.

Veamos ahora la afirmación. Aplicando el teorema de Gauss-Bonnet tenemos que

$$\alpha = -A + 2\pi(2p - 1),$$

donde A es el área de \mathcal{P} en una métrica hiperbólica. Por lo tanto, si el polígono \mathcal{P} es arbitrariamente pequeño, α está arbitrariamente proximo a $2\pi(2p - 1)$. Por otro lado, podemos aumentar el área A del polígono \mathcal{P} de tal forma que α sea arbitrariamente pequeño. Por lo tanto deformando continuamente \mathcal{P} , existe un polígono geodésico tal que $\alpha = 2\pi$.



Bibliografía

- [1] Moira Chas, *Combinatorial Lie bialgebras of curves on surfaces*, *Topology* **43** (2004), 543–568.
- [2] Mamfredo Perdigão do Carmo, *Geometría Riemanniana*, Gráfica Portinho Cavalcanti Ltda; Rio de Janeiro; Rua Santa, 299 p., 1988.
- [3] William M. Goldman, *Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations*, *Invent. Math.* **85** (1986), 263–302.
- [4] Victor Guillemin and Allan Pollack, *Diferential topology*, Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, 222p., 1974.
- [5] Joel Hass and Peter Scott, *Intersections of Curves on Surfaces*, *Israel Journal of Mathematics* **51** (1985), 90–120.
- [6] Morris W. Hirsch, *Diferential topology*, Graduate texts in mathematics; 33. New York ; Berlin : Springer, 222 p., 1988.
- [7] Thomas W. Hunderford, *Algebra.*, Graduate text in mathematics. New York: Springer, 502 p. , 1989.
- [8] Shahn. Majid, *Foundations of quantum group theory.*, Cambridge : Cambridge University Press, 607 p., 1995.
- [9] William S. Massey, *Algebraic topology, an introduction*, Graduate texts in mathematics; 56. New York ; Berlin : Springer, 261 p., 1984.
- [10] Vladimir G. Turaev, *Skein Quantization of Poisson Algebras of Loops on Surfaces*, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* **24** (1991), 635–704.